Analysis II

Sommersemester 2014 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 12 **Abgabe Donnerstag 03.07.2014**

(1) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) f ist stetig differenzierbar für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Die Richtungsableitungen von f in $(0,0)$ existieren für alle Richtungen.

(c) f ist in $(0,0)$ nicht stetig.

(2) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) \quad = \quad \begin{cases} (x^2+y^2)^{3/2} \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) f ist für alle $x \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

(b) Die partiellen Ableitungen sind bei $(0,0)$ nicht stetig.

Bemerkung: Stetigkeit der partiellen Ableitungen ist also nur ein hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit!

(3) Sei $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) \equiv g(|x|) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^m.$$

(a) Beweisen Sie, daß f genau dann differenzierbar ist, wenn g differenzierbar ist mit $g'(0) = 0$.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von f unter der Bedingung das f differenzierbar ist.

(4) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und zusammenhängend. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(A)$ ein Intervall.

(b) Ist $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $Df(x) \neq 0$ für alle $x \in A$, so ist $f(A)$ offen.

Zusatzaufgabe

Charakterisieren Sie die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die es eine Metrik auf $\mathbb{R}$ gibt, so dass f nicht stetig ist.

Viel Erfolg!