Analysis III Wintersemester 2017/2018

Hausaufgabenblatt 13

Abgabe am 30.01.2018

Aufgabe 1. Der Schwartzraum $\mathcal{S}$ ist mit der Faltung $*$ als Multiplikation eine Algebra. Zeigen Sie, dass kein Einselement in $\mathcal{S}$ existiert.

Aufgabe 2. Sei die 2π-periodische Funkion $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ gegeben durch

$$f(2\pi k + x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \le x < \pi, \\ 1 & \text{falls } \pi \le x < 2\pi, \end{cases}$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in [0, 2\pi)$.

(a) Man bestimme die Fourierreihe von f (im Wesentlichen eine reine Sinusreihe).

(b) Mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung zeige man

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$ die Gleichheit

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin(n + 1/2)x}{\sin(x/2)}.$$

Aufgabe 4. Wir definieren den Dirichletkern $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$D_n(x) = \begin{cases} 2n + 1 & \text{falls } x = 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ seien $c_k(f)$, $k \in \mathbb{Z}$, die Fourierkoeffizienten und

$$s_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}.$$

Beweisen Sie

$$s_n(f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x) f(x - t) dx.$$

Zusatzaufgabe 5.

(a) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $G : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, $(r, \phi) \mapsto g(r \cos \phi, r \sin \phi)$. Zeigen Sie, dass

$$(\Delta g)(r \cos \phi, r \sin \phi) = \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(r, \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r}(r, \phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}(r, \phi)$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie zu $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|}\right), \text{für } x \neq 0 \\ 0, \text{für } x = 0 \end{cases}$$

die Funktion Δh auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung aus Teil (a). Untersuchen Sie, ob die Funktion h in 0 zweimal stetig differenzierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls Δh an der Stelle 0.