Höhere Analysis

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 3 **Abgabe Mittwoch 18.11. 2009**

(1) Sei $C^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ der Raum der auf $[0,1]$ stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen, und sei $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ für $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Es ist $C^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ nicht vollständig.

(b) Der Raum $C^1_{\mathbb{R}}([0,1])$ mit der Norm $\|f\| := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$ ist vollständig.

(2) Zeigen Sie, daß $C([0,1])$ bezüglich der Norm

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

nicht vollständig ist.

(3) Ein normierter Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann nicht separabel, wenn es eine überabzählbare Teilmenge A von E und ein $\delta > 0$ gibt mit $\|x - y\| \geq \delta$ für alle $x, y \in A$ mit $x \neq y$.

(4) Sei $\mathcal{R}([0,1])$ der Raum der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[0,1]$. Für $0 < p < \infty$ sei

$$Q(f) := \left(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $1 \leq p < \infty$ so erfüllt Q die Dreiecksungleichung.

(b) Ist $0 < p < 1$ so erfüllt Q nicht die Dreiecksungleichung.

Zusatzaufgaben

- Eine Teilmenge B eines Vektorraum E heißt algebraische Basis (Hamel Basis), wenn B linear unabhängig ist und $\mathrm{Lin}(B) = E$ gilt. Zeigen Sie:

  (a) Jedes maximale linear unabhängige System in E ist eine algebraische Basis.

  (b) Jeder Vektorraum besitzt eine algebraische Basis.

- Seien $1 \leq p, q < \infty$ und $0 < \theta < 1$ und sei r durch $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$ definiert. Zeigen Sie: Es gilt

$$l^p \cap l^q \subset l^r,$$

  insbesondere gilt die Lyapunovsche Ungleichung

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta}.$$