Vorkurs zur Vorlesung Mathematik für Chemiker 1

Prof. Dr. habil. Thomas Runst,

Mathematisches Institut, Friedrich–Schiller–Universität Jena

Literatur

- H. Amann, *Mathematik für Chemiker*, Birkhäuser–Verlag
- H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis I, II*, Teubner–Verlag
- K. Jug, *Mathematik in der Chemie*, Springer–Lehrbuch
- N. Rösch, *Mathematik für Chemiker*, Springer–Lehrbuch
- L. Papula, *Mathematik für Chemiker*, Enke–Verlag
- L. Papula, *Übungen und Anwendungen zur Mathematik für Chemiker*, Enke–Verlag
- L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, 1, 2, 3*, Vieweg–Verlag
- R. Walter, *Einführung in die lineare Algebra*, Vieweg–Verlag
- H. G. Zachmann, *Mathematik für Chemiker*, VCH Weinheim

- W. Göhler, *Höhere Mathematik - Formeln und Hinweise -*, Deutsch–Verlag
- L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Mathematische Formelsammlung*, Vieweg–Verlag

Voraussetzungen

- Schulwissen (Gymnasium)

Ziel der Vorlesung

- teilweise Wiederholung und Vertiefung der Kenntnisse aus dem Mathematikunterricht
- Anfangsgründe der höheren Mathematik
- Vermittlung von mathematischen Lehrinhalten, die für die Chemieausbildung erforderlich sind
- Schwerpunkte:
  - Verständnis von mathematischen Denkweisen und Modellen
  - Herausbildung von rechnerischen Fertigkeiten und deren Anwendungen in der Chemie

1 Allgemeine Grundlagen

Zahlenbereiche

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: Menge der *natürlichen* Zahlen.

Die Addition und die Multiplikation sind in $\mathbb{N}$ uneingeschränkt ausführbar:

Es gilt $a + b \in \mathbb{N}$ sowie $a \cdot b \in \mathbb{N}$, falls $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$: Menge der *ganzen* Zahlen.

In $\mathbb{Z}$ ist außerdem die Subtraktion (als Umkehroperation zur Addition) uneingeschränkt ausführbar:

Es gilt $a - b \in \mathbb{Z}$ für beliebige $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Q} = \{p/q : \ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$: Menge der *rationalen* Zahlen.

In $\mathbb{Q}$ ist zusätzlich die Division (als Umkehroperation der Multiplikation) **außer durch** 0 uneingeschränkt ausführbar:

Es gilt $p/q \in \mathbb{Q}$ für beliebige $p \in \mathbb{Q}$ und $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \neq 0$.

Falls $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, so heißt $x = \sqrt{a}$, $x \geq 0$ (Quadratwurzel von a) genau dann, wenn $x^2 = a$ gilt.

Aus der Schule ist bekannt, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gilt.

Das kann man indirekt beweisen: Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ gilt, und es sei

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

wobei $p \in \mathbb{Q}$ und $q \in \mathbb{Q}$ *teilerfremd* sind. Dann folgt aus

$$p^2 = 2q^2,$$

dass p gerade und damit auch q eine gerade Zahl sein muss. Das ist jedoch ein Widerspruch zur Annahme, dass p und q teilerfremd sind.

$\mathbb{R} = \{ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k 10^k : \ a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}\}$: Menge der *reellen* Zahlen (unendliche Dezimalbrüche).

Wir identifizieren die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der Zahlengerade.

Weiterhin ist $\mathbb{Q}$ eine dichte Menge auf der Zahlengerade ($\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$).

$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Menge der *irrationalen* Zahlen.

Insbesondere ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl. Weitere wichtige irrationale Zahlen sind z.B. π und die Eulersche Zahl e.

Jedoch auch in $\mathbb{R}$ ist nicht jede quadratische Gleichung lösbar, z.B. gilt das für $x^2+1=0$ (Man erhält in diesem Fall wegen

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$$

eine *negative Diskriminante*). Wir werden später die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ einführen, um die Lösungen bestimmen zu können. Wir haben insgesamt die folgenden (echten) Zahlenbereichserweiterungen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Falls a eine reelle Zahl ist, so definieren wir durch

$$|a| = \begin{cases} +a: & \text{falls } \ a \geq 0 \\ -a: & \text{falls } \ a < 0 \end{cases}$$

den *Betrag* von a. Dann sind folgende Eigenschaften erfüllt:

$$|a| \geq 0,\ |-a| = |a|,\ |a| = 0 \ \text{ genau dann, wenn } \ a = 0.$$

Weiterhin gilt die Dreiecksungleichung

$$|a+b| \leq |a| + |b| \ \text{ für alle } \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren jetzt durch

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) :\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen. Diese Menge kann man mit der Anschauungsebene identifizieren. Für ein geordnetes Paar gilt

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

$P = (x,y)$ entspricht der Darstellung von P durch seine kartesischen Koordinaten in der Ebene.

Durch

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

ist der *Abstand* zwischen den Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ definiert (*Satz von Pythagoras*). Insbesondere gilt

$$|P_1P_2| = |P_2P_1|$$

sowie die Dreiecksungleichung

$$|P_1P_2| \leq |P_1P_3| + |P_2P_3|$$

für beliebige Punkte $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, der Anschauungsebene.
Analog führt man den $\mathbb{R}^3$ ein.

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : \, x \in \mathbb{R}, \; y \in \mathbb{R}, \; z \in \mathbb{R}\}.$$

ist die Menge aller geordneten Tripel reeller Zahlen und entspricht dem Anschauungsraum. Es gilt also

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2, \; y_1 = y_2, \; z_1 = z_2$$

$P = (x, y, z)$ entspricht der Darstellung von P im Anschauungsraum durch seine kartesischen Koordinaten.

Durch

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

ist der *Abstand* zwischen den Punkten $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ definiert (*Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras*). Es gilt ebenfalls

$$|P_1P_2| = |P_2P_1|$$

sowie die Dreiecksungleichung

$$|P_1P_2| \leq |P_1P_3| + |P_2P_3|$$

für beliebige Punkte P_i, $i = 1, 2, 3$, des Anschauungsraumes.

Wichtige Koordinatensysteme

Die Lage eines beliebigen Punktes P in der Anschauungsebene bzw. im Anschauungsraum lässt sich mit Hilfe eines Koordinatensystems darstellen.
Wichtige Koordinatensysteme in der Ebene

- Die (rechtwinkligen) kartesischen Koordinaten (x, y) (siehe oben)

- Die Polarkoordinaten (r, φ)

  Mit $r \geq 0$ wird der Abstand des Punktes P vom Nullpunkt (Länge des Radiusvektors) und mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der positiven x-Achse bezeichnet.

  Es existiert eine eineindeutige Zuordnung zwischen den kartesischen Koordinaten und den Polarkoordinaten für alle Punkte der Anschauungsebene, die **nicht** den Nullpunkt darstellen.

  Falls die Polarkoordinaten für P durch $P = (r, \varphi)$ mit $r \neq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ gegeben sind, so erhält man die kartesischen Koordinaten $P = (x, y)$ auf eindeutige Weise durch

  $$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

  Falls ungekehrt die kartesischen Koordinaten $P = (x, y) \neq (0, 0)$ gegeben sind, so erhält man die eindeutig bestimmten Polarkoordinaten $P = (r, \varphi)$ durch

  $$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

  sowie

  $$\varphi = \arctan\frac{y}{x}, x \neq 0,$$

  unter Beachtung der Quadrantenbeziehungen. Wir setzen weiterhin

  $$(*) \begin{cases} \varphi = & \frac{\pi}{2}, \quad \text{falls } y > 0,\ x = 0 \\ \varphi = & \frac{3\pi}{2}, \quad \text{falls } y < 0,\ x = 0. \end{cases}$$

  Man beachte für $x = y = 0$ ist der Winkel φ *nicht erklärt.*

Wichtige Koordinatensysteme im Anschauungsraum

- Die (rechtwinkligen) kartesischen Koordinaten (x, y, z) (siehe oben)

- Die Zylinderkoordinaten (r, φ, z), wobei in der (x, y)-Ebene die Polarkoordinaten (r, φ) gegeben sind

  Dann erhalten wir die Beziehungen

  $$x = r \cos \varphi, \; y = r \sin \varphi, \; z = z,$$

  bei der Umrechnung von Zylinderkoordinaten in kartesische Koordinaten.

  Im umgekehrten Fall haben wir

  $$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \; \varphi = \arctan \frac{y}{x},$$

  wobei wir die entsprechenden Quadrantenbeziehungen und (*) wie bei den ebenen Polarkoordinaten verwenden. Man beachte, dass auch hier der Winkel φ in der (x,y)-Ebene für $x = y = 0$ *nicht definiert* ist.

- Die Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ)

  Dabei ist $r \geq 0$ der Abstand des Punktes P vom Nullpunkt (Länge des Radiusvektors), $0 \leq \vartheta \leq \pi$ bezeichnet den Winkel, den der Radiusvektor mit der positiven z-Achse bildet, und $0 \leq \varphi < 2\pi$ ist der Winkel zwischen der *Projektion* des Radiusvektors auf die (x, y)-Ebene und der positiven x-Achse. Wir haben dann die folgenden Beziehungen

  $$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \; y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \; z = r \cos \vartheta$$

  bei der Umrechnung von Kugelkoordinaten in die entsprechenden (räumlichen) kartesischen Koordinaten.

  Im anderen Fall ergibt sich zunächst

  $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

  Analog zu oben erhalten wir unter Berücksichtigung der Quadrantenbeziehungen und (*) zunächst den Winkel φ durch

  $$\varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$

  für $(x, y) \neq (0, 0)$.

  Schließlich folgt aus

  $$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = r^2 \sin^2 \vartheta$$

und $z = r\cos\vartheta \neq 0$ wegen

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \tan\vartheta,$$

dass

$$\vartheta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

gilt. Weiterhin setzen wir

$$\begin{aligned}
\vartheta &= 0, \quad \text{falls } z > 0,\ x^2+y^2 = 0,\\
\vartheta &= \pi, \quad \text{falls } z < 0,\ x^2+y^2 = 0,\\
\vartheta &= \frac{\pi}{2}, \quad \text{falls } z = 0,\ x^2+y^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Man beachte auch hier, dass der Winkel ϑ für den Nullpunkt $(0,0,0)$ *nicht erklärt* ist.

Wichtige geometrische Objekte

In der Anschauungsebene

Die Gerade:

Die allgemeine Geradengleichung ist durch $Ax+By+C=0$ gegeben, wobei A, B und C beliebige reelle Zahlen sind. Als Spezialfälle erhalten wir für $A=0$ und $B\neq 0$ eine Parallele zur x-Achse sowie für $B=0$ und $A\neq 0$ eine Parallele zur y-Achse. Für $B\neq 0$ folgt die bekannte allgemeine Geradengleichung

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = mx + b,$$

wobei $m = \tan\delta$ den Anstieg (Richtungskoeffizient) und b den Schnittpunkt mit y-Achse liefert. Analog kann man den Fall $A\neq 0$ betrachten.

Der Kreis:

Durch $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$ wird ein Kreis vom Radius $R>0$ mit Mittelpunkt $M=(x_0,y_0)$ in kartesischen Koordinaten dargestellt.

Eine mögliche Parameterdarstellung für den gleichen Kreis ist

$$x = x_0 + R\cos\varphi,\ y = y_0 + R\sin\varphi, \quad \varphi\in[0,2\pi].$$

Außerdem ist der Kreis ein Spezialfall der allgemeinen *Kurven 2. Ordnung* K, die durch

$$K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,\ a_{11},\dots,a_{33}\in\mathbb{R}\}$$

definiert sind.

Die *Normalformen* der Kurven 2. Ordnung sind durch

- die *Parabel*: $y^2 = 2px$,
- die *Ellipse*: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,
- die *Hyperbel*: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

gegeben. Insbesondere ist der Kreis mit $a = b = R$ eine spezielle Ellipse.

Wir geben jetzt eine *geometrische Charakterisierung* dieser Normalformen. Dabei sind wie üblich $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$ und der Abstand zwischen diesen Punkten ist durch

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

gegeben.

Wichtige Begriffe für die Parabel

$$\boxed{y^2 = 2px,\ p \neq 0,}$$

sind der *Brennpunkt* $B = (p/2, 0)$ und die Leitlinie g, d.h. die Gerade, die durch den Punkt $(-p/2, 0)$ parallel zur y-Achse verläuft. Dann gelten folgende Eigenschaften.

Satz 1 (a) *Ein Punkt $P = (x, y)$ liegt auf der Parabel $y^2 = 2px$ genau dann, wenn der Abstand von P zur Leitlinie g gleich dem Abstand von P zum Brennpunkt B ist.*

(b) *(Brennpunkteigenschaft) Es sei $p > 0$. Jeder von rechts parallel zur x-Achse einfallende Strahl verläuft nach Reflexion an der Parabel durch den Brennpunkt B.*

Wichtige Bezeichnungen für die Ellipse

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0,}$$

sind die beiden Brennpunkte $B_1 = (-e, 0)$ und $B_2 = (e, 0)$, wobei die Brennweite durch

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} > 0$$

gegeben ist. $M = (0, 0)$ ist der Mittelpunkt, $S_1 = (-a, 0)$ und $S_2 = (a, 0)$ sind die Hauptscheitel sowie $N_1 = (0, b)$ und $N_2 = (0, -b)$ sind die Nebenscheitel der Ellipse. Die große Achse hat die Länge $2a$, und die kleine Achse hat die Länge $2b$.

Für die Ellipse gelten folgende Eigenschaften.

Satz 2 (a) *Ein Punkt* $P = (x, y)$ *liegt auf der Ellipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *genau dann, wenn*

$$|PB_1| + |PB_2| = 2a$$

gilt.

(b) *(Brennpunkteigenschaft) Jeder von einem Brennpunkt ausgehende Strahl verläuft nach Reflexion an der Ellipse durch den anderen Brennpunkt.*

Wichtige Begriffe für die Hyperbel

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0,}$$

sind die beiden Brennpunkte $B_1 = (-e, 0)$ und $B_2 = (e, 0)$, wobei

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$$

gilt. Die beiden Hauptscheitel sind durch $S_1 = (-a, 0)$ und $S_2 = (a, 0)$ gegeben. In diesen Punkten schneidet die Hyperbel die Hauptachse, die durch B_1 und B_2 verläuft. Die Nebenachse ist die Mittelsenkrechte der Strecke zwischen B_1 und B_2.

Durch $y = \pm\frac{b}{a}x$ sind die *Asymptoten* der Hyperbel definiert. Aus der Hyperbelgleichung folgt

$$y^2 = b^2(\frac{x^2}{a^2} - 1) = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

und somit

$$y \to \pm\frac{b}{a}x \quad \text{für} \quad |x| \to \infty.$$

Für die Hyperbel kann man folgende Eigenschaften herleiten.

Satz 3 (a) *Ein Punkt* $P = (x, y)$ *liegt auf der Hyperbel* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *genau dann, wenn*

$$\Big||PB_1| - |PB_2|\Big| = 2a$$

gilt.

(b) *(Brennpunkteigenschaft) Die Tangente an einem Punkt* P *der Hyperbel halbiert den Winkel, der mit den beiden Brennpunkten gebildet wird.*

Allgemeinere Darstellungen sind z.B. für

- die Ellipse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$,
- die Hyperbel $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$,
- und die Parabel $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$,

falls die Achsen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

Die *Flächen 2. Ordnung* F im Anschauungsraum sind durch

$$\begin{aligned} F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad : \quad & a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz \\ & +2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0\} \end{aligned}$$

definiert, wobei alle Zahlen $a_{11},\ldots,a_{44}$ reell sind.

Wir geben nur die Normalformen der Flächen 2. Ordnung an.

- die Kugel: $x^2+y^2+z^2=R^2$,
- der Ellipsoid: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$,
- das einschalige Hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$,
- das zweischalige Hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
- das elliptische Paraboloid: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$,
- das hyperbolische Paraboloid: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$,
- der elliptische Kegel: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$,
- der elliptische Zylinder: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z\in\mathbb{R}$,

- der hyperbolische Zylinder: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z \in \mathbb{R}$,
- und der parabolische Zylinder: $\frac{x^2}{a^2} = 2y,\ z \in \mathbb{R}$.

Ein *entarteter* Spezialfall ist die ebene Fläche $Ax + By + Cz + D = 0$, wobei die Zahlen A, B, C und D reell sind.

Wir beschäftigen uns jetzt mit wichtigen Rechenoperationen und deren Eigenschaften.

Die Potenzen mit ganzen Exponenten sind für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ durch

$$x^0 = 1,\ x^{n+1} = x \cdot x^n,\ n \in \mathbb{N}_0,\ x^{-n} = \frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N},$$

definiert. Weiterhin setzen wir

$$0^n = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Man beachte: $\boxed{0^0 \text{ ist } \textbf{nicht} \text{ definiert (unbestimmter Ausdruck).}}$

Es gilt der *Binomischer Lehrsatz*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k y^{n-k},$$

wobei

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

die Binomialkoeffizienten darstellen, und $n!$ rekursiv durch $0! = 1$ und $(n+1)! = (n+1)n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben sind.

Es sei $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt $x > 0$ die k-te Wurzel einer reellen Zahl $a > 0$, falls $x^k = a$ gilt (Umkehrfunktion zur Potenzfunktion x^k).

$$\boxed{x = \sqrt[k]{a} \Longleftrightarrow x^k = a, \quad x > 0,}$$

(wir schreiben auch $x = a^{1/k}$).

Für reelles $a > 0$ und $r = p/q \in \mathbb{Q}$ können dann die Potenzen mit rationalen Koeffizienten definiert werden.

Es ist

$$a^r = a^{p/q} =: \left(\sqrt[q]{a}\right)^p,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}.$$

Die Zahl a heißt Basis, und r ist der Exponent.

Wir wissen, dass die Menge $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist. Somit kann man durch eine Grenzbetrachtung die Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$

$$f(x) = a^x,\ x \in \mathbb{R},$$

einführen.

Satz 4 *Es seien a, b, x und y reelle Zahlen. Weiterhin sei $a > 0$ und $b > 0$ erfüllt. Dann gelten folgende Eigenschaften für die Exponentialfunktion:*

(a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,

(b) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$,

(c) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$,

(d) *Falls $x > 0$ und $b \neq 1$ gilt, so existiert genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $b^y = x$.*

Unter Verwendung der Aussage (d) kann man jetzt die Logarithmusfunktion zur Basis b definieren.

Definition 1 *Es gelte $x > 0$ und $0 < b \neq 1$. Dann ist $\log_b x$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl y mit $b^y = x$, d.h. es gilt* $\boxed{y = \log_b x \Longleftrightarrow x = b^y = b^{\log_b x}.}$
Die Zahl y nennt man den Logarithmus von x zur Basis b (Umkehrfunktion der Exponentialfunktion)

Satz 5 *Für $a > 0$, $c > 0$ und $0 < b \neq 1$ gelten die folgenden Eigenschaften:*

(a) $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$,

(b) $\log_b 1 = 0$ *und* $\log_b b = 1$,

(c) $\log_b a^x = x \log_b a$ *für* $x \in \mathbb{R}$,

(d) $\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$,

(e) $\log_b a = \log_b c \cdot \log_c a$, *falls* $c \neq 1$.

Diese Aussagen kann man leicht unter Verwendung von Satz 4 und der Definition 1 herleiten. Wir zeigen stellvertretend dafür die Aussage (e):
Nach Definition 1 gilt

$$a = b^{\log_b a},\ a = c^{\log_c a},\ c = b^{\log_b c}.$$

Damit erhalten wir unter Verwendung der Eigenschaft (b) in Satz 4

$$b^{\log_b a} = c^{\log_c a} = \left(b^{\log_b c}\right)^{\log_c a} = b^{\log_b c \cdot \log_c a}$$

und somit wegen der Eindeutigkeit der Logarithmusfunktion die Aussage

$$\log_b a = \log_b c \cdot \log_c a.$$

Die wichtigsten *Spezialfälle* ergeben sich bei folgender Wahl der Basis b:
Für $b = 10$ erhält man den dekadischen (Briggs'schen) Logarithmus. Wir setzen dann $\lg = \log_{10}$.

Falls $b = e$ (Eulersche Zahl) ist, so hat man den natürlichen Logarithmus. Wir verwenden später immer $\ln = \log_e$.

2 Folgen und Reihen

Eine Folge (Zahlenfolge) ist eine unendliche oder endliche Menge von reellen Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots$, die in *bestimmter Reihenfolge* angeordnet sind.
Wir verwenden z.B. folgende Schreibweise:
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ für eine unendliche Folge,
$\{a_n\}_{n=1}^{N}$ für eine endliche Folge.

Definition 1 (a) *Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt beschränkt, falls eine reelle Zahl $c > 0$ derart existiert, dass $|a_n| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*
(b) *$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt unbeschränkt, wenn es zu jeder reellen Zahl C eine natürliche Zahl n_C gibt mit $|a_{n_C}| > C$.*
(c) *$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt konvergente Folge mit Grenzwert oder Limes $a \in \mathbb{R}$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.*
Wir verwenden die Schreibweisen:

$$a_n \to a \quad \text{für } n \to \infty, \ \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Falls $a = 0$ ist, so nennen wir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge.
(d) *Falls $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nicht konvergent ist, so heißt die Folge divergent.*
(e) (unendlicher Grenzwert, bestimmt divergent) *Wir setzen $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, falls für alle reellen Zahlen $c > 0$ eine Zahl $n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n > c$ für alle $n \geq n_0$. Analog definiert man $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.*
(f) *$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt (streng) monoton wachsende Folge, falls*

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \cdots$$

$$(a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k < a_{k+1} < \cdots)$$

gilt.
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt (streng) monoton fallende Folge, falls

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots$$

$$(a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_k > a_{k+1} > \cdots$$

gilt.
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ heißt (streng) monotone Folge, falls sie entweder (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Beispiel 1 (a) Die Folge mit $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, ist beschränkt, streng monoton fallend und konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

(Nullfolge),

(b) die Folge mit $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, ist unbeschränkt, streng monoton wachsend mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

(bestimmt divergent),

(c) die Folge mit $a_{2n-1} = -1$, $a_{2n} = 1$, $n \in \mathbb{N}$, ist beschränkt, keine monotone Folge, besitzt keinen Grenzwert und ist somit (unbestimmt) divergent.

Wichtige Eigenschaften und Rechengesetze für konvergente Folgen

Satz 1 (a) (Cauchy-Kriterium)

Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ist konvergent genau dann, wenn für alle* $\varepsilon > 0$ *eine Zahl* $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *existiert, so dass* $|a_k - a_m| \leq \varepsilon$ *für alle* k, $m \in \mathbb{N}$ *mit* $m \geq k \geq N_0$ *gilt (Cauchy-Folge).*

(b) *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} a_n = b \Longrightarrow a = b.$$

(c) (notwendiges Konvergenzkriterium)

Jede konvergente Folge ist beschränkt, d.h. falls $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *unbeschränkt ist, so ist diese Folge niemals konvergent und damit divergent.*

(d) *Es gibt beschränkte Folgen, die nicht konvergent sind.*

(e) (i) *Falls* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eine Nullfolge und* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt ist, so ist* $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ebenfalls eine Nullfolge.*

(ii) *Falls* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eine konvergente Folge und* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *beschränkt ist, so ist* $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ebenfalls eine konvergente Folge.*

(f) *Eine monotone beschränkte Folge besitzt stets einen endlichen Grenzwert.*

(g) *(Rechenregeln für konvergente Folgen)*

Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

für die Folgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *und* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Dann folgt

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$, *falls* $a_n \neq 0,\ a \neq 0$,

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$,

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a,\ c \in \mathbb{R}$,

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *falls* $b_n \neq 0,\ b \neq 0$,

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty}{a_n}^k = a^k$, *falls* $k \in \mathbb{Z}$ *sowie zusätzlich* $a_n \neq 0,\ a \neq 0$ *für* $k \leq 0$,

(viii) *falls* $a_n \leq b_n$, *so ist* $a \leq b$,

(ix) *falls* $a = b$ *und für die Folge* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *gilt* $a_n \leq c_n \leq b_n$, *so folgt* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Bemerkung 1

- zu (c) siehe Beispiel 1(b)
- zu (d) siehe Beispiel 1(c)
- zu (e)(i) Falls $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge und falls $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ unbeschränkt ist, so kann $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$

  eine Nullfolge sein:
  $$\frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n},$$
  eine allgemeine konvergente Folge sein
  $$\frac{1}{n^2} \cdot 5n = 5$$
  oder auch eine unbeschränkte Folge sein
  $$\frac{1}{n} \cdot n^2 = n.$$
- zu (e)(ii) $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine Cauchy-Folge
- zu (f) für eine monoton wachsende Folge gilt
  $$\lim_{n\to\infty} a_n \geq a_k$$
  für alle $k \in \mathbb{N}$ und analog für eine monoton fallende Folge
  $$\lim_{n\to\infty} a_n \leq a_k$$
  für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel 2 (a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{4n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4n^3}(1+\frac{3}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} \cdot \lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n}) = 0,$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = 0,$$

(c) wichtige Grenzwerte:

- $k \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{n\to\infty} n^k a^n = \begin{cases} 0: & 0 < a < 1 \\ \infty: & a > 1 \end{cases}$$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- (e: Eulersche Zahl)

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n = e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Reihen:

Es seien $a_0, a_1, a_2, \ldots,$ reelle Zahlen. Dann heißt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ (unendliche) Reihe. Mit

$$S_N = \sum_{j=0}^{N} a_j,\ N \in \mathbb{N}_0,$$

bezeichnen wir die N-te Partialsumme der Reihe. Die Partialsummen $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ bilden eine Folge von reellen Zahlen.

Definition 2 (a) *Die Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *heißt konvergent, falls die Folge der Partialsummen* $\{S_N\}_{N=0}^{\infty}$ *eine konvergente Folge ist. Dann existiert*

$$\lim_{N\to\infty} S_n =: S,$$

und man setzt $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = S$.

(b) *Die Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *heißt absolut konvergent, falls die Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ *konvergent ist.*

(c) *Eine nicht konvergente Reihe heißt divergent.*

Satz 2 (a) *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent. Die Umkehrung gilt i.a.* **nicht**, *d.h. es existieren konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind.*

(b) (notwendiges Konvergenzkriterium)

Für jede konvergente Reihe gilt $a_j \to 0$ *für* $j \to \infty$, *d.h. falls* $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$ *nicht erfüllt ist, kann die Reihe niemals konvergent sein, sie ist also divergent.*

Beispiel 3 (a) Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ mit $a_j = 1$ für alle j ist divergent, da das notwendige Konvergenzkriterium verletzt wird. Wir erhalten

$$\lim_{j\to\infty} a_j = 1 \neq 0$$

und

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} N = \infty.$$

(b) Es gelte $a_j = \dfrac{1}{(j+1)(j+2)}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Wegen

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{(j+1)(j+2)} = \sum_{j=0}^{N} \Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j+2} \Big) \\ &= 1 - \frac{1}{N+2} \to 1 \text{ für } N \to \infty \end{aligned}$$

ist diese Reihe (absolut) konvergent, und es gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)(j+2)} = 1.$$

(c) *Die geometrische Reihe*: Es sei $q > 0$, $q \neq 1$ und $a_j = q^j$, $j \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$S_N = \sum_{j=0}^{N} q^j = \frac{1 - q^{N+1}}{1-q}.$$

Diese Aussage ergibt sich aus

$$\begin{aligned} S_N &= 1 + q + \cdots + q^N \\ qS_N &= q + q^2 \cdots + q^{N+1} \end{aligned}$$

und damit

$$(1-q)S_N = 1 - q^{N+1}.$$

Damit erhalten wir (für $q = 1$ siehe (a))

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \lim_{N\to\infty} S_N = \begin{cases} \frac{1}{1-q} : & 0 < q < 1 \\ \infty : & q \geq 1. \end{cases}$$

Die geometrische Reihe ist also für $0 < q < 1$ (absolut) konvergent und sonst divergent.

(d) *Die harmonische Reihe* ist gegeben durch

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}.$$

Es gilt wegen

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots,$$

dass wir unendlich viele Summanden erhalten, die größer als 1/2 sind. Damit haben wir

$$\lim_{N\to\infty} S_N=\infty.$$

Die harmonische Reihe ist also divergent.

(e) (Verschärfung von (b), (d)) Es sei $\alpha \geq 0$. Die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^\alpha}$$

ist für $0\leq \alpha \leq 1$ divergent und für $\alpha > 1$ (absolut) konvergent. Insbesondere gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Eine Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

heißt *alternierend*, falls die Glieder a_j abwechselnd positiv und negativ sind.

Satz 3 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)
Eine alternierende Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *konvergiert, falls ihre Glieder* $|a_j|$, $j\in\mathbb{N}_0$, *eine monotone Nullfolge bilden.*

Beispiel 4 (a) Die alternierende Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\mp\cdots$$

ist nach Satz 3 konvergent (siehe auch Einschachtelungsprinzip), aber nicht absolut konvergent (siehe Beispiel 3(d)). Es gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}=\ln 2.$$

(b) Die Beträge der alternierende Reihe

$$1-\frac{1}{5^1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3}\mp\cdots\cdots$$

bilden zwar eine Nullfolge, aber keine monotone Folge. Wegen

$$S_{2N}=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N}-\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{5^j}$$

(Differenz aus harmonischer und geometrischer Reihe) ist die Folge der Partialsummen nicht konvergent sondern bestimmt divergent; die Reihe ist also divergent.

Satz 4 (Konvergenz- und Divergenzkriterien für Reihen mit nichtnegativen Gliedern)
(a) (Majorantenkriterium)
Falls $0 \leq a_j \leq b_j$ *für alle* j *gilt, so folgt aus der Konvergenz von* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *auch die Konvergenz der Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$.
(b) (Minorantenkriterium)
Falls $a_j \geq b_j \geq 0$ *für alle* j *gilt, so folgt aus der Divergenz von* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ *auch die Divergenz der Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$.
(c) (Wurzelkriterium)
Es gelte

$$\sqrt[j]{|a_j|} \leq q < 1 \quad \textit{für alle} \quad j.$$

Dann ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *absolut konvergent und damit auch konvergent.*
Es gelte

$$\sqrt[j]{|a_j|} \geq Q > 1 \quad \textit{für alle} \quad j.$$

Dann ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *divergent.*
(d) (Quotientenkriterium)
Es gelte

$$\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} \leq q < 1 \quad \textit{für alle} \quad j.$$

Dann ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *absolut konvergent und damit auch konvergent.*
Es gelte

$$\frac{|a_{j+1}|}{|a_j|} \geq Q > 1 \quad \textit{für alle} \quad j.$$

Dann ist $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ *divergent.*

(Aussagen gelten auch, falls eine Zahl $j_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass die Kriterien für **alle** $j \geq j_0$ gelten. In den Anwendungen meist $|a_j| = a_j$ für alle j (nichtnegative Glieder). Die Aussagen (d) und (e) sind i.a. **falsch**, falls für q nur die Abschätzung $q \leq 1$ bzw. für Q nur die Abschätzung $Q \geq 1$ erfüllt ist. Man beachte z.B. die harmonische Reihe.)

Beispiel 5 (a) Die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{2^j}$$

konvergiert (absolut) nach dem Quotientenkriterium. Es gilt

$$\frac{(j+1)^2 \cdot 2^j}{j^2 \cdot 2^{j+1}} = \frac{j^2+2j+1}{2j^2} = \frac{1+2/j+1/j^2}{2} \to \frac{1}{2}$$

für $j \to \infty$.

(b) Die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^j(j+1)}$$

konvergiert (absolut) nach dem Wurzelkriterium. Wir erhalten

$$\sqrt[j]{\frac{1}{\ln^j(j+1)}} = \frac{1}{\ln(j+1)} \to 0$$

für $j \to \infty$.

(c) Die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(j+2)}$$

divergiert nach dem Minorantenkriterium, da die harmonische Reihe divergiert. Man verwende

$$\frac{1}{\ln(j+2)} > \frac{1}{j+2}.$$

Satz 5 (Eigenschaften absolut konvergenter Reihen)

(a) (Umordnung)

In einer absolut konvergenten Reihe kann man die Glieder beliebig umordnen, ohne die Summe der Reihe zu verändern.

(b) (Summe, Differenz, Produkt)

Es gelte für zwei absolut konvergente Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = S_a$ *und* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j = S_b$.

(i) *Falls* α, $\beta \in \mathbb{R}$, *so ist*

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\alpha a_j + \beta b_j) = \alpha S_a + \beta S_b.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \\ &= a_0 b_0 \\ &\quad + a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ &\quad + a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ &\quad + a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 \\ &\quad + \cdots \\ &= S_a \cdot S_b. \end{aligned}$$

3 Funktionen

Wir verwenden folgende Bezeichnungen für Intervalle, wobei a, b reelle Zahlen sind.

$$(-\infty, a),\ (-\infty, a],\ (b, \infty),\ [b, \infty)$$

für unbeschränkte offene bzw. halboffene Intervalle,

$$(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$$

für beschränkte offene, halboffene bzw. abgeschlossene Intervalle.

Definition 1 (a) *Eine Abbildung f, die jeder reellen Zahl $x \in D_f \subset \mathbb{R}$ genau eine reelle Zahl y zuordnet, nennt man eine Funktion (oder eindeutige Abbildung) einer reellen Variable.*

Schreibweise: $y = f(x), \quad x \overset{f}{\mapsto} y$

(b) *D_f heißt Definitionsbereich von f und*

$$W_f = \{y \in \mathbb{R} :\ y = f(x),\ x \in D_f\} \subset \mathbb{R}$$

nennt man Wertebereich von f.

hier: (natürlicher) Definitionsbereich, d.h. maximales Intervall, wo Funktion erklärt ist.
weitere Bezeichnungen:
(a) *eindeutige* Abbildung:

$$x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2), \quad \text{d.h.} \quad f(x_1) \neq f(x_2) \Longrightarrow x_1 \neq x_2.$$

(b) f heißt *eineindeutig* (umkehrbar eindeutig, injektiv), falls zusätzlich aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt. In diesem Fall existiert die *Umkehrfunktion* (inverse Funktion)

$$f^{-1} :\ y \in W_f \mapsto x = f^{-1}(y) \in D_f.$$

Im weiteren **stets** folgendes *Vorgehen* bei der Konstruktion der Umkehrfunktion und deren *Interpretation*:
(i) Man löse $y = f(x)$ *eindeutig* nach der unabhängigen Variable $x = f^{-1}(y)$ auf,
(ii) durch formales Vertauschen der beiden Variablen in $x = f^{-1}(y)$ erhält man die Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$.
(entspricht Spiegelung an der Geraden $y = x$)

Es seien f und g reelle Funktionen. Dann führen wir folgende Operationen mit Funktionen *punktweise* ein.

skalare Multiplikation $y = a \cdot f$: $y(x) = a \cdot f(x)$, $D_{a \cdot f} = D_f$

Summe, Differenz $y = f \pm g$: $y(x) = f(x) \pm g(x)$, $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$

Produkt $y = f \cdot g$: $y(x) = f(x) \cdot g(x)$, $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

Quotient $y = \frac{f}{g}$: $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \setminus \{x : \ g(x) = 0\}$

Verkettung, Hintereinanderausführung $y = f \circ g$: Falls zusätzlich $W_g \subset D_f$ gilt, so ist $y = f \circ g$ definiert durch $y(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ mit $D_{f \circ g} = D_g$.

Im allgemeinen gilt $f \circ g \neq g \circ f$ (Operation $\circ$ ist **nicht kommutativ)**

Symmetrie, wobei wir voraussetzen, dass $x, -x \in D_f$ gilt.

(a) *gerade* Funktion (spiegel-, achsensymmetrisch)

$$f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in D_f.$$

(b) *ungerade* Funktion (punktsymmetrisch)

$$f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in D_f.$$

Periodizität mit *Periode a*. In diesem Fall muss $x \in D_f \Longrightarrow x + a \in D_f$ gelten.

Die Funktion $y = f(x)$ hat die *Periode* a, $a \in \mathbb{R}$, falls

$$f(x + a) = f(x) \text{ für alle } x \in D_f.$$

Monotonie

(a) Die Funktion $y = f(x)$ heißt (streng) *monoton wachsend*, falls für alle x_1, $x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$ folgt.

(b) Die Funktion $y = f(x)$ heißt (streng) *monoton fallend*, falls für alle x_1, $x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ folgt.

(c) **Jede streng monoton wachsende (fallende) Funktion $y = f(x)$ ist eineindeutig und besitzt eine streng monoton wachsende (fallende) inverse Funktion $y = f^{-1}(x)$.** (nach vereinbarter Interpretation)

Potenzfunktion $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Fall n gerade: Die Funktion $y = x^n$ ist auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend und umkehrbar. Die inverse Funktion ist dort $y = +\sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, und ebenfalls streng monoton wachsend. Die Funktion $y = x^n$ ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und dort auch umkehrbar. Die inverse Funktion ist dann $y = -\sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, und streng monoton fallend (Interpretation).

2. Fall n ungerade: Die Funktion ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Die Umkehrfunktion ist

$$y = \begin{cases} -\sqrt[n]{-x}: & x \in (-\infty, 0] \\ +\sqrt[n]{+x}: & x \in [0, \infty) \end{cases}$$

ist streng monoton wachsend.

Definition 2 (a) *Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x = x_0$ den Grenzwert y_0, falls für alle Folgen $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset D_f$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x_0$ die Aussage $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_j) = y_0$ gilt. Wir schreiben dann*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \quad \textit{oder} \quad f(x) \to y_0 \quad \textit{für} \quad x \to x_0.$$

(b) *Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x = x_0$ den rechtsseitigen Grenzwert y_0, falls für alle Folgen $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset D_f$, $x_j \geq x_0$, $j \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x_0$ die Aussage $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_j) = y_0$ gilt. Wir schreiben dann*

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = y_0 \quad \textit{oder} \quad f(x) \to y_0 \quad \textit{für} \quad x \to x_0 + 0.$$

(c) *Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x = x_0$ den linksseitigen Grenzwert y_0, falls für alle Folgen $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset D_f$, $x_j \leq x_0$, $j \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x_0$ die Aussage $\lim\limits_{j\to\infty} f(x_j) = y_0$ gilt. Wir schreiben dann*

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = y_0 \quad \textit{oder} \quad f(x) \to y_0 \quad \textit{für} \quad x \to x_0 - 0.$$

(d) *Die Funktion $f(x)$ ist stetig in $x_0 \in D_f$, falls*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(e) *Analog definiert man die links- bzw. rechtsseitige Stetigkeit einer Funktion f.*

Beispiel 1 Alle unten angegebenen *elementaren Funktionen* sind auf dem Definitionsbereich stetig.

Nach Definition 2(d) gilt

$$f \text{ in } x_0 \text{ stetig } \Longrightarrow x_0 \in D_f.$$

(a) Definitionslücken in $x_0 \notin D_f$: f ist in x_0 **nicht** definiert und damit in x_0 nicht stetig.

(a1) *Polstelle in x_0:*

Die einseitigen (endlichen oder unendlichen) Grenzwerte

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x), \; \lim_{x\uparrow x_0} f(x)$$

existieren und **mindestens** einer ist **unendlich**.

Die Funktion $f(x) = 1/x$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist stetig auf D_f. Im Punkt $x_0 = 0 \notin D_f$ hat die Funktion eine Polstelle (mit Vorzeichenwechsel), da

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\uparrow 0} f(x) = -\infty.$$

Die Funktion $f(x) = x^{-2}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat in $x_0 = 0 \notin D_f$ eine Polstelle (ohne Vorzeichenwechsel), da

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty.$$

(a2) *stetig hebbare Definitionslücken in* x_0:

Es existieren die endlichen Grenzwerte

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x).$$

Die Funktion $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ist stetig. Im Punkt $x_0 = -1$ hat die Funktion eine stetig hebbare Definitionslücke, da

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} x - 1 = -2.$$

Die Funktion kann also auf ganz $\mathbb{R}$ durch die Funktion g stetig fortgesetzt werden, indem man

$$g(x) = \begin{cases} f(x): & x \neq -1 \\ -2: & x = -1. \end{cases}$$

setzt.

(a3) *Oszillationen* im Punkt x_0:

Es existiert **kein** (endlicher oder unendlicher) links- und/oder rechtsseitiger Grenzwert von $f(x)$ in x_0.

Die Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig und hat in $x_0 = 0$ eine Oszillation, da

$$\lim_{x \downarrow 0} \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \uparrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

weder als endliche noch als unendliche Grenzwerte existieren.

(b) Unstetigkeitsstelle in $x_0 \in D_f$: f ist in x_0 definiert, hat aber dort keinen oder einen vom Funktionswert $f(x_0)$ abweichenden Grenzwert.

Die Funktion

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1: & x > 0 \\ 0: & x = 0 \\ -1: & x < 0. \end{cases}$$

ist stetig für alle $x \neq 0$. Im Punkt $x_0 = 0 \in D_f$ ist die Funktion unstetig; es liegt eine endliche Sprungstelle vor, da

$$f(x_0) = 0, \quad \lim_{x \downarrow 0} f(x) = +1, \quad \lim_{x \uparrow 0} f(x) = -1.$$

Die Funktion $f(x) = \text{sign}(|x|)$ hat in $x_0 = 0$ einen endlichen Sprung, da

$$0 = f(x_0) \neq \lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0: & x \leq 0 \\ \ln x: & x > 0. \end{cases}$$

hat in $x_0 = 0$ einen unendlichen Sprung als Unstetigkeitsstelle, da

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \uparrow 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Analog hat die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}: & x > 0 \\ 0: & x \leq 0. \end{cases}$$

hat in $x_0 = 0$ einen oszillierende Unstetigkeitsstelle, da

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) \;\; \underline{\text{nicht}} \text{ existiert}, \quad \lim_{x \uparrow 0} f(x) = f(0) = 0.$$

Eine Funktion heißt *stückweise stetig*, falls sie nur endlich viele Unstetigkeitsstellen hat, die alle endliche Sprungstellen sind.

(c) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1: & x \in \mathbb{Q} \\ +1: & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nirgends stetig.

Grenzwert der Funktion $f(x)$ für $x \to \pm\infty$

Ist $f(x)$ auf $[a, \infty)$ definiert, und gilt für die Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ mit $x_n \in D_f$ und $x_n \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c,$$

wobei $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zugelassen ist, so sagt man, dass der Funktionwert für $x \to \infty$ gegen den (endlichen oder unendlichen) Grenzwert c strebt. Analog definiert man

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c.$$

Nähert sich der Graph der Funktion f für $x \to -\infty$ bzw. $x \to \infty$ einer Geraden $y = kx + b$, so nennt man diese Gerade *Asymptote* der Funktion f.

Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

hat wegen

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} (1 - \frac{2}{x^2 + 1}) = 1$$

als Asymptote die Gerade $y = 1$ (Annäherung von unten). Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{2x - 6}$$

hat wegen

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x - 1}{2x - 6} = \lim_{x \to \pm\infty} (\frac{1}{2}x + 1 + \frac{5}{2x - 6}) = \pm\infty,$$

als Asymptote die Gerade $y = x/2 + 1$ (Annäherung an die Asymptote erfolgt für $x \to -\infty$ von unten und für $x \to \infty$ von oben).

Die Asymptoten der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

sind wegen

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - b^2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \pm\frac{b}{a}x = \pm\infty$$

die Geraden $y = \pm b/a \cdot x$.

Satz 1 (Eigenschaften stetiger Funktionen)

(i) *Die Funktionen f und g seien stetig in x_0.*

(a) *Falls α und β reelle Zahlen sind, so ist auch $\alpha f + \beta g$ in x_0 stetig.*

(b) *Die Funktion $f \cdot g$ ist in x_0 stetig.*

(c) *Es gelte $g(x_0) \neq 0$. Dann ist auch die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig.*

(ii) *Falls g in x_0 und f in $g(x_0)$ stetig sind, so ist die Funktion $f \circ g$ in x_0 stetig.*

(iii) *Es sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall, und f sei stetig auf $[a, b]$.*

(a) *Dann ist f auf $[a, b]$ beschränkt, d.h. es existiert eine reelle Zahl c mit*

$$|f(x)| \leq c < \infty \quad \textit{für alle} \quad x \in [a, b].$$

(b) *Die Funktion f nimmt auf $[a, b]$ ihren größten Wert (Maximum) und kleinsten Wert (Minimum) an.*

(c) (Zwischenwertsatz) *Es seien $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$, und es gelte*

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0.$$

Dann gibt es mindestens einen Punkt $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit $f(x_0) = 0$.

Aussage (f) verwendet man für Näherungsmethoden zum Bestimmung der Nullstellen, z.B. beim Sekantenverfahren.

Im folgenden geben wir grundlegende Eigenschaften der elementaren Funktionen an. Wie oben schon bemerkt, sind diese Funktionen innerhalb ihres Definitionsbereiches **stetig**.

Die elementaren Funktionen

(a) Die ganzen rationalen Funktionen (Polynomfunktionen) vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ sind

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Falls $n = 0$ bzw. $n = 1$ gilt, spricht man von *konstanten* bzw. linearen Funktionen.

x_0 ist *Nullstelle* (Wurzel) von $f(x)$, falls $f(x_0) = 0$ gilt.

Für quadratische Gleichungen $(n = 2)$ mit Normalform $x^2 + px + q = 0$ sind die (reellen) Nullstellen x_1, x_2 durch

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

gegeben, falls die Diskriminante $D = p^2/4 - q$ die Eigenschaft $D \geq 0$ erfüllt (falls $D = 0$ haben wir eine doppelte reelle Nullstelle und für $D < 0$ keine reelle Nullstelle).

Nach den *Vietasche Wurzelsätzen* gilt $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Diese Aussage folgt aus

$$\begin{aligned} 0 = (x - x_1)(x - x_2) &= x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1 x_2 \\ &= x^2 + px + q. \end{aligned}$$

(b) Die gebrochen-rationalen Funktionen ist durch

$$y = f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0},\ a_n \cdot b_m \neq 0,$$

gegeben, wobei f_1 und f_2 ganze rationale Funktionen sind. Damit erhalten wir den Definitionsbereich $D_f = \{x \in \mathbb{R} :\ f_2(x) \neq 0\}$.

Die *Nullstellen* von $f(x)$ sind alle $x \in D_f$ mit $f_1(x) = 0$.

Die *Definitionslücken* von $f(x)$ sind alle Nullstellen von f_2. Sie sind entweder Polstellen oder stetig hebbar.

f ist eine *echt* gebrochene-rationale Funktion, falls $n < m$, und eine *unecht* gebrochene-rationale Funktion, falls $n \geq m$ gilt.

Mittels *Polynomdivision* (euklidischer Algorithmus) ist es möglich, jede unecht gebrochene-rationale Funktion als Summe einer ganzen rationalen und einer echt-gebrochenen rationalen Funktion darzustellen.

Zum Beispiel ergibt sich

$$(x^3 + x^2 + 1) : (x - 1) = x^2 + 2x + 2 + \frac{3}{x-1}.$$

(c) Die *allgemeine Potenzfunktionen* ist

$$y = f(x) = x^\alpha,\ x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Es gilt stets $y > 0$ und $y(1) = 1$. Spezialfälle der allgemeinen Potenzfunktion sind die (übliche) Potenzfunktion $y = x^n$ und die Wurzelfunktionen $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

(d) Die *trigonometrische Funktionen*

Die Sinusfunktion $y = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$.

Es gilt $-1 \le y \le 1$. Die Funktion ist ungerade, 2π-periodisch und auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsend.

Die Maxima ($y = 1$) sind in $x = \pi/2 + 2k\pi$ und die Minima ($y = -1$) in $x = 3/2\pi + 2k\pi$, die Nullstellen sind $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Die Kosinusfunktion $y = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$.

In diesem Falle gilt ebenfalls $-1 \le y \le 1$. Die Funktion ist gerade, 2π-periodisch und auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend.

Ihre Maxima ($y = 1$) sind in $x = 2k\pi$, ihre Minima ($y = -1$) sind in $x = \pi + 2k\pi$ und ihre Nullstellen sind $x = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Wichtige Funktionswerte sind

$$\sin 0 = 0,\ \sin \pi/6 = 1/2,\ \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2,\ \sin \pi/3 = \sqrt{3}/2,\ \sin \pi/2 = 1$$

$$\cos 0 = 1,\ \cos \pi/6 = \sqrt{3}/2,\ \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2,\ \cos \pi/3 = 1/2,\ \cos \pi/2 = 0.$$

Weiterhin gilt die Identität

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ x \in \mathbb{R}.}$$

Wir haben folgende <u>Additionstheoreme</u>:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Die Tangensfunktion $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x},\ x \ne \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Wir erhalten $-\infty < y < \infty$. Die Funktion ist ungerade, π-periodisch und auf $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton wachsend.

Die Nullstellen sind wegen $\sin k\pi = 0$ durch $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, gegeben, und die Polstellen sind wegen $\cos(\pi/2 + k\pi) = 0$ in $x = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Die Kotangensfunktion $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x},\ x \ne k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Analog zur Tangensfunktion erhalten wir $-\infty < y < \infty$. Die Funktion ist ungerade, π-periodisch und auf $(0, \pi)$ streng monoton fallend.

Die Nullstellen sind $x = \pi/2 + k\pi$ und die Polstellen sind $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Weiterhin gilt

$$\tan x \cdot \cot x = 1.$$

Hier gelten folgende Additionstheoreme:

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}, \quad \cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cdot \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}.$$

Allgemein kann man folgende Aussagen über die Symmetrie des Quotienten zweier symmetrischer Funktionen beweisen:

Es sei f eine gerade und g eine ungerade Funktion. Dann ist wegen

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(-x)}{-g(-x)} = -h(-x)$$

die Funktion h für alle $x \in D_h$ ungerade. Das gleiche gilt für

$$k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Falls f und g entweder beide gerade oder beide ungerade Funktionen sind, so sind die Funktionen

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

für $x \in D_h$ bzw. $x \in D_k$ stets gerade.

(e) Die *Arkusfunktionen* (zyklometrische Funktionen) als Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen)

Die *Arkussinus-Funktion* $y = f^{-1}(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, ist als Umkehrfunktion der auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsenden Sinusfunktion ungerade und ebenfalls streng monoton wachsend.

Es gilt $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ und die Nullstelle ist wegen $\sin 0 = 0$ in $x = 0$.

Die *Arkuskosinus-Funktion* $y = f^{-1}(x) = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$, ist als Umkehrfunktion der auf $[0, \pi]$ streng monoton fallenden Kosinusfunktion streng monoton fallend. Es gilt $0 \leq y \leq \pi$, aus $\cos \pi/2 = 0$ folgt $y(0) = \pi/2$ und die Nullstelle ist wegen $\cos 0 = 1$ in $x = 1$.

Die *Arkustangens-Funktion* $y = f^{-1}(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$, ist als Umkehrfunktion der auf $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton wachsenden Tangensfunktion ungerade und streng monoton wachsend. Es gilt $-\pi/2 < y < \pi/2$ und die Nullstelle ist in $x = 0$ wegen $\tan 0 = 0$. Das asymptotische Verhalten ist durch

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\pi/2, \lim_{x \to +\infty} \arctan x = +\pi/2$$

gegeben.

Die *Arkuskotangens-Funktion* $y = f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$, $x \in \mathbb{R}$, ist als Umkehrfunktion der auf $(0,\pi)$ streng monoton fallenden Kotangensfunktion streng monoton fallend. Es gilt $0 < y < \pi$ sowie wegen $\cot \pi/2 = 0$, dass $y(0) = \pi/2$ ist. Das asymptotische Verhalten ist

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x = \pi, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x = 0.$$

(f) Die *Exponentialfunktionen zur Basis* a, $a > 0$, $a \neq 1$ ist gegeben durch

$$y = f(x) = a^x, \; x \in \mathbb{R}.$$

Falls $0 < a < 1$ gilt, so ist sie streng monoton fallend; für $a > 1$ ist sie streng monoton wachsend. Es gilt $0 < y < \infty$ und $y(0) = 1$. Sie hat **keine** Nullstelle. Für das asymptotische Verhalten gilt

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} \infty: & 0 < a < 1 \\ 0: & a > 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0: & 0 < a < 1 \\ \infty: & a > 1 \end{cases}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist $y = e^x$, falls a die Eulersche Zahl e ist .

Die Exponentialfunktion erfüllt die folgende Funktionalgleichung

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2), \quad x_1,\, x_2 \in D_f.$$

(g) Die *Hyperbolische Funktionen*

Die *Sinus hyperbolikus-Funktion*

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \; x \in \mathbb{R},$$

ist eine streng monoton wachsende und ungerade Funktion. Es gilt $-\infty < y < \infty$ und ihre Nullstelle ist in $x = 0$. Das asymptotische Verhalten ist

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sinh x = \pm\infty.$$

Die *Kosinus hyperbolikus-Funktion*

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; x \in \mathbb{R},$$

ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0,\infty)$ streng monoton wachsend. Sie ist eine gerade Funktion und besitzt **keine** Nullstelle. Es gilt $y \geq 1$. Ihr Minimum ist $y(0) = 1$. Das asymptotische Verhalten wird beschrieben durch

$$\lim_{x\to\pm\infty} \cosh x = \infty.$$

Wichtig ist die folgende Identität

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,\ x \in \mathbb{R}.}$$

Es gelten die folgenden Additionstheoreme:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

und

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$

Die *Tangens hyperbolikus-Funktion* ist eine ungerade Funktion und durch

$$y = f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ x \in \mathbb{R},$$

definiert.

Die *Kotangens hyperbolikus-Funktion*

$$y = f(x) = \coth x = \frac{1}{\tanh x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

ist eine ungerade Funktion.

(h) Die *Logarithmusfunktion* $y = \log_a x$, $x > 0$, zur *Basis* a, $a > 0$, $a \neq 1$, ist als Umkehrfunktion der auf $(-\infty, \infty)$ streng monotonen Exponentialfunktion streng monoton wachsend, falls $a > 1$, und streng monoton fallend, falls $0 < a < 1$. Weiterhin gilt $-\infty < y < \infty$ und die Nullstelle ist in $x = 1$. Es gelten folgende Grenzwerte

$$\lim_{x \downarrow 0} \log_a x = \begin{cases} \infty : & 0 < a < 1 \\ -\infty : & a > 1 \end{cases}, \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty : & 0 < a < 1 \\ \infty : & a > 1 \end{cases}.$$

Ein wichtiger Spezialfall zur Basis $a = e$ (Eulersche Zahl) ist $y = \ln x$, der *natürliche Logarithmus.*

(i) Die *inverse Hyperbelfunktionen* (Areafunktionen)

Die *Areasinus-Funktion* $y = \operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$, ist als Umkehrfunktion der auf $(-\infty, \infty)$ streng monoton wachsenden Sinus hyperbolikus-Funktion eine ungerade und ebenfalls streng monoton wachsende Funktion. Die Nullstelle ist $x = 0$.

Die Beziehung folgt aus

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x = \operatorname{arsinh} y.$$

Dann erhalten wir aus

$$0 = e^x - 2y - e^{-x},$$

durch Multiplikation mit e^x

$$0 = e^{2x} - 2ye^x - 1.$$

Setzen wir jetzt $z = e^x$ und damit $x = \ln z$, so folgt die quadratische Gleichung

$$0 = z^2 - 2yz - 1$$

mit der Lösung

$$z = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

wegen der Substitution $z = e^x > 0$. Daraus ergibt sich $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ und entsprechend unserer Interpretation die Aussage.

Die *Areakosinus-Funktion* $y = \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$, ist als Umkehrfunktion der auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsenden Kosinus hyperbolikus-Funktion auch streng monoton wachsend. Die Nullstelle ist in $x = 1$. Diese Aussagen lassen sich analog herleiten.

Abschließend geben wir **wichtige Grenzwerte** an, die man z.B. in der Differentialrechnung benötigt.

$$\begin{gathered}
\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \lim_{x \to \infty} (1 + 1/x)^x = e, \\
\lim_{x \downarrow 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e, \quad \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \ln e = 1, \\
\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0, \\
\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \\
\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \\
\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty,\ m \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^m} = 0,\ m \in \mathbb{N}.
\end{gathered}$$

4 Differenzierbare Funktionen

Definition 1 *Es sei f eine reelle Funktion mit $D_f = (a, b)$ und $x_0 \in (a, b)$.*
(a) *f ist in x_0 differenzierbar, falls der (endliche) Grenzwert des Differenzenquotienten*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \alpha$$

existiert. Wir verwenden dann folgende Bezeichnung für die erste Ableitung von f im Punkte $x = x_0$ (Anstieg der Tangente)

$$\alpha = \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0).$$

(b) *f heißt in x_0 rechtsseitig differenzierbar, falls der endliche Grenzwert*

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \beta$$

existiert. Wir setzen dann $f'_+(x_0) = \beta$. Analog definiert man die linksseitige Differenzierbarkeit und $f'_-(x_0)$.

Bemerkung 1 Ist $x_0 + h = x$, d.h. $x - x_0 = h$, so erhält man folgende Schreibweise

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Satz 1 *Die Funktion f sei differenzierbar in x_0.*
(a) *Die Tangente $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist die einzige lineare Funktion (Gerade) $g(x)$ mit der Approximationseigenschaft*

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to x_0, \tag{1}$$

(b) *Es existieren $f'_\pm(x_0)$ und es gilt $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$.*
(c) *Die Funktion f ist dann stetig in x_0.*

Bemerkung 2 (a) Aus der Differenzierbarkeit von f in x_0 folgt die Stetigkeit in x_0. Die Umkehrung ist i.a. falsch, z.B. $f(x) = |x|$ ist stetig aber nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, da

$$1 = f'_+(0) \neq f'_-(0) = -1.$$

(b) Approximationseigenschaft

Satz 2 (Differentiationsregeln)

(i) *Die Funktionen f und g seien in x_0 differenzierbar.*

(a) *Falls α und β reelle Zahlen sind, so ist $\alpha f + \beta g$ in x_0 differenzierbar.*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

(b) *$f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar.*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(c) *Falls $g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar.*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

(ii) *Es sei f in x_0 und g in $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $h = g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit*

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

(iii) *Es sei f in x_0 und f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Falls $f'(x) \neq 0$, so erhalten wir mit $x_0 = f^{-1}(y_0)$ die Beziehung*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

(iv) (logarithmische Ableitung)

Es sei f in x_0 differenzierbar und es gelte $f(x_0) > 0$. Dann gilt für $h(x) = \ln f(x)$

$$h'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Beispiel 1 (a) $y(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$: Wir erhalten mit Satz 2(i)(c)

$$y'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

(b) $y(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$: Es gilt nach Satz 2(i)(c)

$$y'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.$$

(c) $y(x) = a^x = e^{x \ln a}$: Mit Satz 2(ii) ergibt sich

$$y'(x) = \left(e^{x \ln a}\right)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

(d) $y(x) = \log_a x$, d.h. $x(y) = a^y$: Wir verwenden Satz 2(iii) sowie Eigenschaften der Logarithmusfunktion und erhalten

$$y'(x) = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

Speziell für $a = e$ folgt
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$
(e) $y(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$: Aus (c) und Satz 2(ii) folgt
$$y'(x) = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$
(f) $y(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$: Wir verwende Satz 2(i)(a) und erhalten
$$y'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$
(g) $y(x) = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$: Analog folgt
$$y'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$
(h) $y(x) = \arcsin x$, d.h. $x(y) = \sin y$: Mit Satz 2(iii) ergibt sich
$$y'(x) = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$
(i) $y(x) = \arccos x$, d.h. $x(y) = \cos y$: Analog erhalten wir
$$y'(x) = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$
(j) $y(x) = \arctan x$, d.h. $x(y) = \tan y$: Wie in (i) folgt mit (a)
$$y'(x) = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$
(k) $y(x) = \operatorname{arccot} x$, d.h. $x(y) = \cot y$: Analog berechnen wir mit (b)
$$y'(x) = \frac{1}{(\cot y)'} = -\frac{1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$
(l) $y(x) = \operatorname{arsinh} x$, d.h. $x(y) = \sinh y$: Wir haben
$$y'(x) = \frac{1}{(\sinh y)'} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$
(m) $y(x) = \operatorname{arcosh} x$, d.h. $x(y) = \cosh y$: Wir erhalten analog
$$y'(x) = \frac{1}{(\cosh y)'} = \frac{1}{\sinh y} = -\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$
(n) $y(x) = x^x = e^{x \ln x}$: Mit Satz 2 (i)(b) und (ii) sowie (d) folgt
$$y'(x) = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x(1 + \ln x).$$

(Übersicht: Ableitungen der elementaren Funktionen)

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$	$a^x \cdot \ln a$
$x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Mittelwertsätze

Satz 3 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Es sei* f *auf* $[a,b]$ *stetig und in* (a,b) *differenzierbar. Dann existiert ein* $x_0 \in (a,b)$ *mit*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2}$$

Bemerkung 3 Aus (2) folgt, dass der Anstieg der Tangente an die Kurve f im Punkte $(x_0, f(x_0))$ gleich dem Anstieg der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

Satz 4 (Satz von Rolle) *Falls zusätzlich* $f(a) = f(b) = 0$ *erfüllt ist, dann existiert ein Punkt* $x_0 \in (a,b)$ *mit* $f'(x_0) = 0$.

Bemerkung 4 Es existiert zwischen zwei Nullstellen der Funktion f mindestens ein Punkt x_0, wo ein minimaler bzw. maximaler Wert von der Funktion f angenommen wird.

Folgerung 1 *Es sei* f *differenzierbar in* (a,b) *mit* $f' \equiv 0$. *Dann ist* f *eine konstante Funktion in* (a,b).

Folgerung 2 (Regel von l'Hospital) *Die Funktionen* f *und* g *seien in einer Umgebung von* x_0 *differenzierbar, und es gelte* $f(x_0) = g(x_0) = 0$. *Falls der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, so existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

und es gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiel 2 Anwendungen der l'Hospitalschen Regel für die Auswertung von unbestimmten Ausdrücken der Form $\frac{0}{0}$.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1.$
(c) (mehrmaliges Anwenden)

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2e^x - 2x - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{2e^x - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{2e^x} = 3.$$

(d) Mit Hilfe von Folgerung 2 lassen sich nach geeigneten Umformungen z.B. auch folgende unbestimmte Ausdrücke untersuchen:

$$\frac{\infty}{\infty},\ 1^\infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 0 \cdot \infty.$$

Wir betrachten dazu $x^{1/x}$ für $x \to \infty$, einen Ausdruck der Form ∞^0:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1}} = e^0 = 1.$$

Als Spezialfall folgt für $x = n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

<u>Höhere Ableitungen</u>

Definition 2 *Die Funktion f sei auf (a,b) differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$. Falls der endliche Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \beta$$

existiert, so heißt β die zweite Ableitung von f in x_0. Wir schreiben $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = f''(x_0) = \beta$. Iterativ definiert man die n-te Ableitung von f in x_0 durch

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x_0) = f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0),\ n \in \mathbb{N}.$$

Anwendungen der Differentialrechnung

$\boxed{\text{(I) Kurvendiskussion}}$

<u>1. Monotonie</u>

Satz 5 *Es sei f auf (a,b) differenzierbar.*
(a) *f ist monoton wachsend auf (a,b) genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$.*
(b) *f ist monoton fallend auf (a,b) genau dann, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$.*
(c) *f ist auf (a,b) streng monoton wachsend genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und es existiert kein Teilintervall $(c,d) \subset (a,b)$ mit $c < d$, so dass $f'(x) = 0$ auf (c,d).*
(d) *f ist auf (a,b) streng monoton fallend genau dann, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und es existiert kein Teilintervall $(c,d) \subset (a,b)$ mit $c < d$, so dass $f'(x) = 0$ auf (c,d).*

2. lokale Extremwerte

Wir setzen im folgenden stets voraus, dass f auf (a, b) definiert ist und $U(x_0) \subset (a, b)$ eine Umgebung von $x_0 \in (a, b)$ ist.

Definition 3 (a) *$f(x)$ hat in x_0 ein lokales Maximum, falls eine Umgebung $U(x_0)$ existiert mit*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \textit{für alle} \quad x \in U(x_0). \tag{3}$$

(b) *$f(x)$ hat in x_0 ein lokales Minimum, falls eine Umgebung $U(x_0)$ existiert mit*

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \textit{für alle} \quad x \in U(x_0). \tag{4}$$

(c) *Falls in* (3) *bzw. in* (4) *sogar $<$ anstelle von $\leq$ bzw. $>$ anstelle von $\geq$ für alle $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ gilt, so sprechen wir von einem eigentlichen lokalen Maximum bzw. von einem eigentlichen lokalen Minimum.*

(d) *$f(x)$ hat in x_0 einen (eigentlichen) lokalen Extremwert, falls $f(x)$ in x_0 entweder ein (eigentliches) lokales Maximum oder ein (eigentliches) lokales Minimum hat.*

Satz 6 (a) (notwendige Bedingung, Extremwert-verdächtig)

$f(x)$ sei stetig differenzierbar in $U(x_0)$. Falls $f(x)$ in x_0 ein lokales Extremum hat, so gilt stets $f'(x_0) = 0$.

(b) (hinreichende Bedingung)

Es gelte $k \geq 2$. Die Funktion $f(x)$ sei in $U(x_0)$ k-mal differenzierbar, und es gelte

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Falls k **gerade** *und $f^{(k)}(x)$ in x_0 stetig ist, dann gilt:*

Falls $f^{(k)}(x_0) > 0$, so hat $f(x)$ in x_0 ein eigentliches lokales Minimum.

Falls $f^{(k)}(x_0) < 0$, so hat $f(x)$ in x_0 ein eigentliches lokales Maximum.

3. Wendepunkte

Definition 4 *Die Funktion $f(x)$ sei auf (a,b) differenzierbar. Dann hat f in $x_0 \in (a,b)$ einen Wendepunkt, falls $f'(x_0)$ ein eigentlicher lokaler Extremwert von $f'(x)$ ist.*

Folgerung 3 *Falls $f(x)$ in x_0 einen Wendepunkt hat, so wird der Graph der Funktion in $(x_0, f(x_0))$ von der Tangente*

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

durchsetzt, d.h. die Funktion wechselt in diesem Punkt von konkav nach konvex bzw. umgekehrt von konvex nach konkav.
Falls $f(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist, so wechselt $f''(x)$ im Wendepunkt sein Vorzeichen. ($f'' > 0$ konvexer Bereich (Linkskurve), $f'' < 0$ konkaver Bereich (Rechtskurve)

Satz 7 (a) (notwendiges Kriterium, Wendepunkt-verdächtig)
$f(x)$ sei in $U(x_0)$ zweimal stetig differenzierbar. Falls $f(x)$ in x_0 einen Wendepunkt hat, so gilt $f''(x_0) = 0$.
(b) (hinreichende Bedingung)
Es gelte $k \geq 3$. Die Funktion $f(x)$ sei in $U(x_0)$ k-mal differenzierbar, und es gelte

$$f''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Falls k **ungerade** *und $f^{(k)}(x)$ in x_0 stetig ist, so hat f in x_0 einen Wendepunkt.*

Vorgehen bei Kurvendiskussionen

- Definitionsbereich, Klassifikation der Definitionslücken
- Symmetrie, Periodizität

- Nullstellen
- Stetigkeit, Klassifikation der Unstetigkeitsstellen
- Monotonieverhalten
- Lage und Klassifikation der Extrempunkte
- Wendepunkte, Konvexität, Konkavität
- Asymptote, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Wertebereich
- Skizze des Graphen der Funktion

$\boxed{\text{(II) Lösen von Extremwertaufgaben}}$