Hausaufgabenblatt 2

Abgabe am 19.04.2017

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{für } t \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist und bestimmen Sie die Werte der Ableitungen in $t = 0$.
Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te Ableitung von f auf $(0, \infty)$ gerade gegeben durch $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(t) = f(t) p_n(1/t)$ wobei p_n ein Polynom ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$.

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

(c) $\lim\limits_{x \to 1-} \ln x \cdot \ln(1 - x)$.

(d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x + 2x}{\cos x + 2x}$.

Aufgabe 3. Es sei f eine stetige Funktion auf $[0, 1]$ mit $f(0) = f(1) = 0$, die in $(0, 1)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Es existiere eine Konstante $C > 0$, so dass $|f''(x)| \leq C$ für alle $x \in (0, 1)$ ist. Zeigen Sie, dass dann für alle $x \in (0, 1)$ gilt

$$|f(x)| \leq C.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Taylor-Entwicklung von f an der Stelle x_0 in $(0, 1)$!

Aufgabe 4. Berechnen Sie das Taylor-Polynom der Funktion

$$f : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3},$$

in $x_0 = 0$ bis $o(x^2)$.

Zusatzaufgabe

Aufgabe 5.

(Z1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar, so dass $\lim_{x \to 0} f'(x)$ existiert. Untersuchen Sie f auf Differenzierbarkeit in $x = 0$.

(Z2) Beweisen Sie unter den Voraussetzungen von Aufgabe 3, dass $|f| \leq C/4$ auf $(0, 1)$ ist.