Analysis III

Wintersemester 2011/12 **Prof. Dr. D. Lenz**

Weihnachtszettel **Abgabe Dienstag 03.01.2012**

(1) Sei $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig und die Kugelloxodrome $\gamma : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\gamma(\phi) = \frac{1}{\cosh(k\phi)} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ \sinh(k\phi) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie γ und ihre Projektion in die x-y-Ebene.

(b) Zeigen Sie, dass γ eine beliebig oft differenzierbare Kurve ist, deren Bild in der Einheitssphäre des $\mathbb{R}^3$ liegt.

(c) Berechnen Sie die Länge von γ.

(2) Es seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld definiert durch

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} g(y) \\ h(x) \end{pmatrix}.$$

(a) Charakterisieren Sie, unter welchen Voraussetzungen an g und h es sich bei f um ein Gradientenfeld handelt.

(b) Geben Sie für entsprechende Funktionen aus (a) eine Stammfunktion von f an.

(3) Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ eine reguläre Parameterdarstellung ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Bild von Φ eine Untermannigfaltigkeit ist.

(c) Finden Sie eine Funktion $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, so dass das Bild von Φ als Nullstellenmenge von h beschrieben wird.

(4) Sei $F = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y, z > 0\}$ und $f(x, y, z) = (xy, yz, xz)$. Berechnen Sie den Fluß von f durch die Fläche F und verifizieren Sie den Satz von Stokes.

Zusatzaufgaben

(Z1) Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(t) = (t, t^a \cos(t^{-b}))$$

für $t \in (0, 1]$ und $\gamma(0) = 0$. Untersuchen Sie, für welche $a, b > 0$ die Kurve γ rektifizierbar ist.

(Z2) Die Simplexkoordinaten werden durch die Transformation $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(u_1, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(1 - u_2) \\ u_1 u_2 (1 - u_3) \\ \vdots \\ u_1 u_2 \ldots u_k (1 - u_{k+1}) \\ \vdots \\ u_1 u_2 \ldots u_n \end{pmatrix}$$

definiert.

(a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante von Φ. Hinweis: Betrachten Sie die Abbildungen $\Psi_1(u) = w$, mit $w_k = u_1 \ldots u_k$ für $k = 1, \ldots, n$ und $\Psi_2(w) = x$ mit $x_k = w_k - w_{k+1}$ für $k = 1, \ldots n-1$ und $x_n = w_n$, und nutzen Sie, dass $\Phi = \Psi_2 \circ \Psi_1$.

(b) Untersuchen Sie Φ auf lokale Umkehrbarkeit und geben Sie in diesen Punkten eine Umkehrabbildung an.

(Z3) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n+1) > f(f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $f(n) = n$ gilt. Hinweis: Es gilt $f(k) > n$ für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k > n$.