Globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Wintersemester 2018 **Dr. Marcel Schmidt**

Blatt 3 **Abgabe: 5.11.2018**

(1) (a) Es sei M eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und es seien (U, φ) und (V, ψ) Karten mit lokalen Koordinatenfunktionen $x^1, \ldots, x^n$ bzw. $y^1, \ldots, y^n$. Beweisen Sie, dass für $p \in U \cap V$ gilt

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (y^j) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = \frac{\partial}{\partial x^i} y^j(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p .$$

Bemerkung: Etwas kompakter lässt sich diese Identität für die induzierten Vektorfelder schreiben. Auf $U \cap V$ gilt dann nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

(b) Auf $\mathbb{R}^2$ seien die glatten Karten

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto v$$

mit Koordinatenfunktionen x, y (Standardkoordinaten) und

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(z,0) \mid z \leq 0\} \to (0,\infty) \times (-\pi, \pi),\ (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mapsto (r, \varphi)$$

mit Koordinatenfunktionen r, φ (Polarkoordinaten) gegeben. Drücken Sie die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ bezüglich der Basis $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$ aus und umgekehrt.

(c) Auf $\mathbb{R}^2$ seien die glatten Karten

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto v$$

mit Koordinatenfunktionen x, y und

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x, y + x^3)$$

mit Koordinatenfunktionen $\tilde{x}$,$\tilde{y}$ gegeben. Zeigen Sie, dass im Punkt $p = (1, 0)$ gilt

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p \neq \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right|_p .$$

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass die induzierte Basis im Tangentialraum stets von der kompletten Karte und nicht nur von einzelnen Koordinatenfunktionen abhängt.

(2) Seien $(X, \mathcal{D}_X)$ und $(Y, \mathcal{D}_Y)$ glatte Mannigfaltigkeiten. Wir statten $M := X \times Y$ mit der Produkttopologie und der von

$$\{((\varphi, \psi), U \times V) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{D}_X \text{ und } (V, \psi) \in \mathcal{D}_Y\}$$

erzeugten glatten Struktur $\mathcal{D}_M$ aus. Es heißt $(M, \mathcal{D}_M)$ das kartesische Produkt von $(X, \mathcal{D}_X)$ und $(Y, \mathcal{D}_Y)$. Ist $y \in Y$ gegeben, so erzeugt jede Derivation $\xi_x \in T_x X$ eine Derivation $\xi_{x,y} \in T_{(x,y)} M$ durch

$$\xi_{x,y}(f) := \xi_x(f(\cdot, y)).$$

Die Abbildung $T_x X \to T_{(x,y)} M$, $\xi_x \mapsto \xi_{x,y}$ ist linear und injektiv. In diesem Sinne kann $T_x X$ als Unterraum von $T_{(x,y)} M$ aufgefasst werden. Führt man analoges für $T_y Y$ durch, so gilt

$$T_{(x,y)} M = T_x X \oplus T_y Y.$$

(a) Beweisen Sie alle Behauptungen aus dem obigen Abschnitt.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ das kartesische Produkt von $(0, \infty)$ und $\mathbb{S}^{n-1}$ ist.

(3) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : I \to M$ eine glatte Kurve. Zeigen Sie, dass für alle $t \in I$ gilt $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} M$. Beweisen Sie ferner, dass für $p \in M$ die Abbildung

$$\begin{gathered}\{\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \mid \varepsilon > 0, \gamma \text{ glatt mit } \gamma(0) = p\} \to T_p M \\ \gamma \mapsto \dot{\gamma}(0)\end{gathered}$$

surjektiv ist.