

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsserie 3

Abgabe am 23.05.2019 vor der Vorlesung

Aufgabe 1**4 Punkte**

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

- a) $y' = 2xy + x$ mit $y(0) = 1$.
- b) $y' = \left(x^2 + \frac{\sinh(x)}{1+x^4}\right)y$ mit $y(0) = 0$.

Aufgabe 2**4 Punkte**Lösen Sie für $y(x_0) = y_0$ die folgenden Anfangswertprobleme:

- a) $y' = 2y + x^2 e^{2x}$
- b) $y' = y + x e^x \cos(x)$

Aufgabe 3**4 Punkte**

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $g, h: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Weiterhin seien φ_1, φ_2 und φ_3 drei Lösungen der Differentialgleichung $y' = g(x)y + h(x)$ auf dem Intervall I . Ihre Anfangswerte $\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)$ und $\varphi_3(x_0)$ seien paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass der Quotient

$$\frac{\varphi_3(x) - \varphi_2(x)}{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)}$$

für alle $x \in I$ den gleichen Wert hat. Deuten Sie außerdem diese Aussage geometrisch.

Aufgabe 4 (Bernoullische Differentialgleichung)**4 Punkte**

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Als Bernoullische Differentialgleichung bezeichnet man eine Differentialgleichung der Form

$$y' = a(x)y + b(x)y^p$$

mit $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass eine Bernoullische Differentialgleichung für jeden Anfangswert (x_0, y_0) mit $x_0 \in I$ und $y_0 > 0$ auf einer Umgebung von x_0 eine eindeutige Lösung besitzt.

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $z = y^{1-p}$ um die Bernoullische Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung zu überführen.

Zusatzaufgabe (das Ebbinghaussche Vergessensmodell) 4 Punkte

Eine Person habe zum Zeitpunkt $t = 0$ eine bestimmte Wissenmenge auswendig gelernt. Das Ebbinghaussche Vergessensmodell ergibt sich aus den folgenden Annahmen: Es sei $p(t)$ der Prozentteil der ursprünglichen Stoffmenge, die die Person zur Zeit t noch im Gedächtnis hat. Es gebe einen gewissen Prozentsatz b des Wissens ($0 < b < 100$), der nie vergessen wird. Zur Zeit t sei die Vergessensrate $p'(t)$ proportional zur Menge des Wissens, das noch vergessen werden kann. Formulieren Sie das zum Modell gehörende Anfangswertproblem, lösen Sie es und skizzieren Sie die Lösung.