Analysis II für Physiker

Sommersemester 2009 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 2 **Abgabe Mittwoch 29.04.2009**

(1) Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $(n \in \mathbb{N})$ mit

$$f_n(x,y) \quad = \quad \begin{cases} \exp\left(-n^2\,\frac{x}{y}\right) & \text{für } y \leq n, \\ 0 & \text{für } y > n. \end{cases}$$

(a) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \;:\; x \leq y\}$. Berechnen Sie $\int_D f_n$.

(b) Ist die Folge der Funktionen $y \mapsto \int\limits_0^y f_n(x,y)dx$, gleichmäßig konvergent? Darf man Limes und Integral im Aufgabenteil (a) vertauschen, d.h. gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^y f_n(x,y)dxdy \;=\; \int\limits_0^\infty \int\limits_0^y \lim_{n\to\infty} f_n(x,y)dxdy \;\; ?$$

(2) Sei $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben und $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = g(|x|)$. Zeigen Sie: Ist g stetig differenzierbar mit $g'(0) = 0$, so existieren die partiellen Ableitungen von f und sind stetig. Berechnen Sie in diesem Fall den Gradienten der Funktion f.

(3) Für eine stetige Funktion $h : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei $F : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert durch $f(x) = h(|x|)x$.

(a) Zeigen Sie, daß F ein Potential besitzt. (<u>Hinweis:</u> Schauen Sie sich Aufgabe 2 nochmal an.)

(b) Bestimmen Sie ein Potential für $F(x) = \frac{1}{|x|^k}x$.

(4) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Halbkugelschale

$$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\; z \geq 0\}.$$

b.w.

Zusatzaufgaben

(1) Skizzieren Sie die Kardioide,

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} (1+\cos t)\cos t \\ (1+\cos t)\sin t \end{pmatrix},$$

und berechen Sie ihre Bogenlänge!

(2) Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral:

$$\int_1^\infty \frac{\ln t}{t^2}\, dt.$$

(3) Konvergieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\frac{1}{t})}{t}\, dt \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt\ ?$$