Wintersemester 2015/16 **Prof. Dr. D. Lenz**

Höhere Analysis II

Blatt 7 **Zur Besprechung in der Übung am 15.12.2015**

(1) Sei $N \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge. Zeigen Sie, dass es eine positive Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ gibt, sodass

$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ F(x) = \int_{(-\infty,x]} f\, d\lambda$$

in keinem Punkt $x \in N$ differenzierbar ist.

Hinweis: Seien $U_n \supset N$, $n \in \mathbb{N}$, offene Mengen mit $U_n \supset U_{n+1}$ und $\lambda(U_n) \leq 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $f = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{U_n}$.

(2) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt absolut stetig, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\sum_{k=1}^{n} |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| < \epsilon$$

für alle disjunkten Intervalle $I_k = [\alpha_k, \beta_k) \subset [a,b]$ mit $\sum_{k=1}^{n} |I_k| < \delta$.

Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ absolut stetig ist.

(3) Sei μ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \mu((-\infty, x))$. Zeigen Sie, dass für $c, x \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es ist f differenzierbar in x mit $f'(x) = c$.

(ii) Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$\left| \frac{\mu(I)}{\lambda(I)} - c \right| < \epsilon$$

für alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ mit $x \in I$ und $0 < \lambda(I) < \delta$.

Hinweis: Für $z_1 < x < z_2$ gilt

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{f(z_2) - f(x)}{z_2 - x} \frac{z_x - x}{z_2 - z_1} + \frac{f(x) - f(z_1)}{x - z_1} \frac{x - z_1}{z_2 - z_2}.$$

(4) Seien $\alpha, \beta \in [0,1]$ mit $\alpha \leq \beta$. Konstruieren Sie eine messbare Menge $E \subset \mathbb{R}^1$, sodass

$$\liminf_{\delta \to 0} \frac{\lambda(E \cap (-\delta, \delta))}{2\delta} = \alpha, \ \limsup_{\delta \to 0} \frac{\lambda(E \cap (-\delta, \delta))}{2\delta} = \beta.$$

Zusatzaufgabe: Konstruieren Sie eine streng monoton wachsende, stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$.