Analysis I

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 4 **Abgabe 18.11.2010**

(1) Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Beweisen Sie, dass für alle $a, b, \lambda \in K$ mit $\lambda > 0$ gilt:

(a) $|ab| \leq \frac{1}{2\lambda}a^2 + \frac{\lambda}{2}b^2$,

(b) $(a+b)^2 \geq 4ab$.

(2) Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass für $r, s \in K$ mit $0 \leq r < s$ gilt:

$$\frac{r}{1+r} < \frac{s}{1+s}.$$

(3) Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass eine Menge $M \subseteq K$ genau dann nach oben beschränkt ist, wenn $-M$ nach unten beschränkt ist. Weisen Sie nach, dass $\sup M$ genau dann existiert, wenn $\inf(-M)$ existiert und dass in diesem Fall gilt:

$$\inf(-M) = -\sup M.$$

(4) Betrachten Sie den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Zeigen Sie, dass $\{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\}$ kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt.

Zusatzaufgabe:

Seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Sei $A_m := \sum_{k=1}^m a_k$ für $m = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$