Globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Wintersemester 2018 **Dr. Marcel Schmidt**

Blatt 4 **Abgabe: 12.11.2018**

(1) Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $X : U \to TM$ ein Vektorfeld. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) X ist glatt.

(ii) Für jedes $p \in U$ existiert eine glatte Karte (V, φ) mit zugehörigen Koordinatenfunktionen (x^i), sodass die Funktionen
$$X^i : U \cap V \to \mathbb{R},\ q \mapsto X_q(x^i)$$
glatt sind.

(iii) Für jede glatte Karte (V, φ) mit zugehörigen Koordinatenfunktionen (x^i) sind die Funktionen
$$X^i : U \cap V \to \mathbb{R},\ q \mapsto X_q(x^i)$$
glatt.

(2) Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und (U, φ) eine Karte mit lokalen Koordinatenfunktionen x^i, $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass für jede kompakte Menge $K \subseteq U$ ein $C_K > 0$ existiert, sodass für alle $p \in K$ und alle $\xi \in T_pM$ mit
$$\xi = \xi^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$
gilt
$$g(p)(\xi, \xi) \geq C_K \sum_{i=1}^{n} (\xi^i)^2.$$

(3) Beweisen Sie, dass jede glatte Mannigfaltigkeit eine riemannsche Metrik besitzt.

Hinweis: Nutzen Sie glatte Zerlegungen der Eins.

(4) Es sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $f, g \in C^\infty(M)$ und $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Beweisen Sie die Produktregeln
$$d(fg) = fdg + gdf \text{ und } \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla_f,$$
und die Kettenregeln
$$d(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)\, df \text{ und } \nabla(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)\, \nabla f.$$