Sommersemester 2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 4 **Abgabe: Donnerstag 3.6.2010**

(1) Betrachten Sie die thermodynamische Gleichung für die Änderung der Wärmemenge in einem Mol **idealen Gases** unter Veränderung von Temperatur und Volumen:

$$\delta Q \;=\; c_V dT \;+\; \frac{RT}{V} dV.$$

(Hierbei ist c_V die spezifische Wärme bei konstantem Volumen und R die universelle Gaskonstante.)

i.) Finden Sie einen integrierenden Faktor für die DGL $\quad 0 \;=\; c_V \;+\; R\frac{T}{V}V'$.

ii.) Geben Sie eine Formel für die entsprechende Stammfunktion an.

(Hinweis: Die Stammfunktion heißt 'Entropie'.)

(2) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{t\to\infty} g(t) = b$ und $a \in (0, \infty)$ gegeben. Zeigen Sie, dass für jede Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung $y' + ay = g$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{b}{a}.$$

(3) Zeigen Sie: Es gibt keine differentierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$f'(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x \;<\; 0, \\ 1 & x \;\geq\; 0. \end{cases}$$

(4) Zeigen Sie: Ist das AWP

$$y' \;=\; f(x, y), \quad y(x_o) \;=\; y_o$$

eindeutig lösbar, so konvergiert jede Folge (ϕ_n) von ϵ_n-Näherungslösungen auf dem Intervall I mit $\epsilon_n \to 0$ gleichmäsig gegen eine Lösung auf I.

Zusatzaufgaben:

1. Betrachtet sei die thermodynamische Gleichung für die Änderung der Wärmemenge in einem (Mol) Gas unter Veränderung von Temperatur und Volumen:

$$\delta Q(T,V) \;=\; Q_1(T,V)dT \;+\; Q_2(T,V)dV.$$

Hierbei ist $Q_1(T,V)$ die Änderung der im System befindlichen Wärmemenge unter konstantem Volumen und $Q_2(T,V)$ die Änderung der Wärmemenge unter konstanter Temperatur. Das Symbol δ weist darauf hin, dass Q keine Stamfunktion für das Vektorfeld $(V,T) \;\mapsto\; (Q_1(T,V), Q_2(T,V))$ ist.

Welche Formel ergibt sich konkret für die Integration des Vektorfeldes

$$(Q_1, Q_2) = (1, \frac{T}{V})$$

entlang einer geschlossenen Kurve γ über den Rand des Rechtecks $[T_1, T_2] \times [V_1, V_2]$?

(Gefragt ist nach der geleisteten Arbeit in einem thermodynamischen Kreisprozess des idealen Gases.)

2. i.) Sei $y' + ay = b$ mit den Konstanten $a, b > 0$ gegeben. Zeichnen Sie das Richtungsfeld.

   ii.) Zeigen Sie, dass für die stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = bx^2/(1+x^2)$ gilt:

$$\int_0^x g(y)\exp(-a(x-y))dy \;\to\; \frac{b}{a}\,, \qquad \text{wenn } x \to \infty.$$

3. Zeigen Sie, dass es keine differentierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, mit

$$f'(x) \;=\; \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

4. Ist das AWP

$$y' \;=\; f(x,y), \quad y(x_o) \;=\; y_o$$

eindeutig lösbar, mit (ϕ_n) einer Folge von ϵ_n-Näherungslösungen und $\epsilon_n \to 0$, so hat jede konvergente Teilfolge den gleichen Grenzwert.