Höhere Analysis 1

Sommersemester 2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 2 **Abgabe Freitag 04.05. 2012**

(1) Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Zeigen Sie:

$$M^\circ = \bigcup_{O \subseteq M,\, O \in \mathcal{T}} O$$

$$\overline{M} = \bigcap_{M \subseteq F,\, X \setminus F \in \mathcal{T}} F$$

$\partial M = \{x \in X : \text{für alle Umgebungen } U \text{ von } x \text{ gilt } U \cap M \neq \emptyset \text{ und } U \cap (X \setminus M) \neq \emptyset\}$.

(2) Seien (M, d) und (N, e) metrische Räume mit Vervollständigungen $(\hat{M}, \hat{d})$ und $(\hat{N}, \hat{e})$. Zeigen Sie:

(a) Jede gleichmäßig stetige Funktion $f : M \to N$ lässt sich eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Funktion $\hat{f} : \hat{M} \to \hat{N}$ fortsetzen (wenn man M bzw. N als Unterräume von $\hat{M}$ bzw. $\hat{N}$ auffasst)

(b) Für stetige Funktionen gilt (a) im allgemeinen nicht.

Erinnerung: Sei (M, d) ein metrischer Raum. Ein vollständiger metrischer Raum $(\hat{M}, \hat{d})$ heißt Vervollständigung von (M, d), falls es eine Isometrie $\iota : M \to \hat{M}$ gibt, sodass $\iota(M)$ dicht in $\hat{M}$ liegt.

(3) Zeigen Sie, dass zwei Vervollständigungen eines metrischen Raumes isometrisch isomorph sind. Hinweis: Wenden Sie Aufgabe 2 in geeigneter Weise auf die durch die Vervollständigungen gegebenen Isometrien an.

(4) Sei (M, d) ein metrischer Raum und $C_b(M, \mathbb{R})$ der Raum aller beschränkten stetigen (reellwertigen) Funktionen auf M. Für $f, g \in C_b(M, \mathbb{R})$ sei

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in M\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $(C_b(M,\mathbb{R}), d_\infty)$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

(b) Es gibt eine Isometrie $\iota : M \to C_b(M,\mathbb{R})$. Hinweis: Sei $x_0 \in M$ fest gewählt. Betrachten Sie die Funktionen

$$\varphi_x : M \to \mathbb{R},\ t \mapsto d(x,t) - d(x_0,t).$$

(c) $(\overline{\iota(M)}, d_\infty)$ ist eine Vervollständigung von (M,d).

Zusatzaufgabe. Sei (M,d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Ein vollständiger metrischer Raum $(\overline{M}, \overline{d})$ ist genau dann eine Vervollständigung von (M,d), wenn er folgende universelle Eigenschaft besitzt:

- Es gibt eine Isometrie $\iota : M \to \overline{M}$.
- Ist (N,e) ein vollständiger metrischer Raum, so lässt sich jede gleichmäßig stetige Funktion $f : M \to N$ eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Funktion $f : \overline{M} \to N$ fortsetzen.