Analysis I

Wintersemester 2016/2017 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 5 **Abgabe: 21.11.2016**

(1) Beweisen Sie mittels Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Sein nun $m \in \mathbb{N}$. Welche Formel vermuten Sie für

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{l=0}^{m} (k+\ell)?$$

Beweisen Sie ihre Vermutung.

(2) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und seien $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$. Beweisen Sie die Rechenregeln

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad \text{und, falls } c \neq 0, \quad \frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}.$$

Hinweis: Für $x, y \in K$ mit $y \neq 0$ ist $\frac{x}{y} = x/y$ das eindeutige Element aus K, welches $\frac{x}{y} y = x$ erfüllt.

(3) Finden Sie eine Addition und Multiplikation auf $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$, so dass $\mathbb{F}_3$ ein Körper wird. Kann man diesen Körper (mit der von Ihnen gefundenen Addition und Multiplikation) anordnen?

(4) Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper und seien $a, b, \lambda \in K$ mit $\lambda > 0$. Beweisen Sie die Ungleichungen

$$|ab| \leq \frac{1}{2\lambda} a^2 + \frac{\lambda}{2} b^2 \quad \text{und} \quad 4ab \leq (a+b)^2.$$