Globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Wintersemester 2018/2019 **Dr. Marcel Schmidt**

Blatt 11 **Abgabe: 4.2.2019**

(1) Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \in M$ existiert eine Karte (U, φ) mit lokalen Koordinaten (x^i), sodass $p \in U$ und

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Hinweis: Nutzen Sie, dass für jede positiv definite Matrix A eine unitäre Matrix U existiert, mit $U^t A U = \mathrm{Id}$.

(2) Es seien $f, g \in \mathrm{Lip}(M)$ und f sei beschränkt auf $\operatorname{supp} g$. Beweisen Sie $fg \in \mathrm{Lip}(M)$.

(3) Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie, dass für jede offene Menge $\Omega \subseteq M$ und jedes kompakte $K \subseteq \Omega$ ein $f \in \mathrm{Lip}_c(M)$ existiert, mit $0 \leq f \leq 1$, $f|_K = 1$ und $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 2/\rho(K, \Omega^c)$.

Hinweis: Es ist $\rho(K, \Omega^c) = \inf\{\rho(x, y) \mid x \in K, y \in \Omega^c\}$.