Globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Wintersemester 2018 **Dr. Marcel Schmidt**

Blatt 7 **Abgabe: 3.12.2018**

(1) Es sei $M = U_R \setminus \{0\}$, $\psi : (0, R) \to (0, \infty)$ glatt und

$$g_\psi = (dr)^2 + \psi(r)^2 \sum_{i=1}^{n} (df^i)^2.$$

Hier sind $r : U_R \setminus \{0\} \to (0, \infty), r(x) = |x|$ und $f_i : U_R \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f_i(x) = |x|^{-1} x^i$. Beweisen Sie, dass bezüglich den Standardkoordinaten für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in U_R \setminus \{0\}$ gilt

$$g_\psi(p)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \begin{cases} \frac{p_i p_j}{|p|^2} - \psi(|p|)^2 \frac{p_i p_j}{|p|^4} & i \neq j, \\ \frac{p_i^2}{|p|^2} + \psi(|p|)^2 \left(\frac{1}{|p|^2} - \frac{(p_i)^2}{|p|^4}\right) & i = j. \end{cases}$$

(2) Es sei $n = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ der Nordpol und $s = -n \in \mathbb{S}^n$ der Südpol der Sphäre. Für $x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{n, s\}$ definieren wir $r(x) \in (0, \pi)$ und $\theta(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$ durch

$$\cos r(x) = x^{n+1} \text{ und } \theta(x) = |x'|^{-1} x',$$

wobei $x' = (x^1, \ldots, x^n)$. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{S}^n \setminus \{n, s\} \to (0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-1},\ x \mapsto (r(x), \theta(x))$$

eine Isometrie der riemannschen Mannigfaltigkeiten $\mathbb{S}^n \setminus \{n, s\}$ und $(0, \pi) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1}$, mit $\psi : (0, \pi) \to \mathbb{R}, \psi(r) = \sin r$ ist.

Hinweis: Nutzen Sie die Identität $x' = \sin r \theta$.

(3) Es sei (M, g) eine Modellmannigfaltigkeit vom Radius R mit zugehöriger Skalierungsfunktion ψ. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle $x \in M$ gilt $\rho(x, 0) = |x|$.

(b) Es ist M genau dann vollständig, wenn $R = \infty$.

(c) Es gilt

$$\mathrm{vol}_g(B_r^\rho(0)) = \omega_n \int_0^r \psi^{n-1}(s)\, \mathrm{d}s,$$

wobei ω_n das Volumen von $\mathbb{S}^{n-1}$ ist.