Globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Wintersemester 2018 **Dr. Marcel Schmidt**

Blatt 8 **Abgabe: 10.12.2018**

(1) Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $x, y \in M$. Ferner sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine Geodäte, die x und y verbindet. Beweisen Sie, dass für alle $t \in [a, b]$ die Einschränkungen $\gamma|_{[a,t]}$ und $\gamma|_{[t,b]}$ Geodäten sind, die x und $\gamma(t)$ bzw. $\gamma(t)$ und y verbinden.

(2) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $u \in \mathcal{D}'(M)$. Beweisen Sie, dass es eine (bezüglich Mengeninklusion) größte offene Menge $O \subseteq M$ gibt, mit $(u, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(O)$.

Hinweis: Glatte Zerlegungen der Eins.

(3) Berechnen Sie den Träger der folgenden Distributionen.

(a) δ_x mit $x \in M$.

(b) $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ aufgefasst als Distribution.

(4) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

(a) Beweisen Sie, dass es für jedes kompakte $K \subseteq M$ relativkompakte offene Mengen U_n, $n \in \mathbb{N}$, gibt, mit

$$K = \bigcap_{n \geq 1} U_n.$$

(b) Es sei $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf M und $\nu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ ein signiertes Maß, mit $\nu(K) = 0$ für alle kompakten $K \subseteq M$. Beweisen Sie $\nu(B) = 0$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathcal{B}$ die kleinste σ-Algebra ist, die alle kompakten Mengen enthält.

Erinnerung: Eine Abbildung $\nu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ heißt signiertes Maß, falls für alle paarweise disjunkten $A_1, A_2, \ldots$ aus $\mathcal{B}$ gilt

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n),$$

wobei die Summe absolut konvergiert.