1) $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$

$f : U \to \mathbb{R}^n$.

f ist Gradientenfeld

$\Longleftrightarrow$

1. $\exists \; \Phi : U \to \mathbb{R}^n$, Φ stetig diffbar,

$\nabla \Phi = f$

$\Longleftrightarrow$

2. $\forall \gamma : [0,1] \to U$ geschlossener stetig diffbarer Weg (d.h. $\gamma(0) = \gamma(1)$ und $\gamma \in C^1([0,1])$) gilt

$$\int_\gamma f = \int_0^1 \langle f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt = 0$$

$\Longleftrightarrow$

3. $\forall \gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ C^1-Wege, sodaß $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ gilt: $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

$U \subset \mathbb{C}$, offen,

8.) $f : U \to \mathbb{C}$

a.) f ist in $z_0 \in U$ komplex diffbar.

$:\iff \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert.

b.) f ist holomorph

$:\iff$ f ist in jedem Punkt $z_0 \in U$ komplex diffbar.

c.) i.) $f(z) = z^{25} + 3z^4 + z^2 + 1$

(Polynome in z sind holomorph)

ii.) $f(z) = |z|$

oder $f(z) = \overline{z}$.

1/ b.)

$h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig

$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$

$$f(x) = h(|x|)\frac{x}{|x|}$$

Sei $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, stetig diff'bar

s.d. $g'(r) = h(r)$, $(r \in (0,\infty))$

(z. B. $g(r) = \int_1^r h(r')\,dr'$).

Dann $\nabla g(|x|) = g'(|x|)\nabla(|x|)$

$$= h(|x|)\frac{x}{|x|}$$

$$= f(x).$$

Also, definiere $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$,

s.d. $\Phi(x) = g(|x|)$.

Dann $\nabla\Phi(x) = f(x)$.

Differenzierbarkeit

3.) a.) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen, $x_0 \in U$. $f : U \to \mathbb{R}^k$ an der Stelle (oder „in") x_0 <u>diff'bar</u>

wenn es ein $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ <u>linear</u> und $\phi \in \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ gibt, so daß $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \varphi(x)$

und $\dfrac{\phi(x)}{|x - x_0|} \to 0$, wenn $x \to x_0$ in U.

L ist die Jacobimatrix an der Stelle x_0,

$$L = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij} \quad i \in \{1, \dots, k\}, \; j \in \{1, \dots, d\}.$$

---

3. b) <u>Z.z.:</u> $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \varphi(x)$

mit $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ linear und $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$

s.d. $\dfrac{\phi(x)}{|x - x_0|} \to 0$, wenn $x \to x_0$ (für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$).

Nun: $f(x) = Ax + b = Ax_0 + b + A(x - x_0) + 0$

$\qquad = f(x_0) + L(x - x_0) + \varphi(x)$

mit $L = A$ und $\varphi(x) \equiv 0$.

neu

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq 0, \\ 0 & (x,y) = 0. \end{cases}$$

In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$D_1 f(x,y) = \partial_x \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

stetig für $(x,y) \neq 0$ als Komposition stetiger Funktionen (an die Wurzel werden nur positive Werte übergeben).

Ebenso für $D_2 f(x,y) = \partial_y f(x,y)$
(aus Symmetriegründen).

Bei $0 \in \mathbb{R}^2$: Wenn f bei 0 diffbar, dann existieren auch die partiellen Ableitungen: $D_1 f(0,0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(\varepsilon,0) - f(0,0)}{\varepsilon}$

$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{0}{\varepsilon} = 0$

Ebenso: $D_2 f(0,0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(0,\varepsilon) - f(0,0)}{\varepsilon} = 0.$

Damit bei $(x,y)=0$ Differenzierbarkeit vorliegt, muß gelten

$$\left| f(x,y) - f(0,0) - Df(0,0)\big((x,y)-(0,0)\big)\right| \Big/ |(x,y)-(0,0)| \to 0.$$

Also:

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - 0|}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0, \quad (x,y) \to 0.$$

Sei $(x,y) = (\varepsilon,\varepsilon)$, für $\varepsilon > 0$.

Dann $\dfrac{|f(\varepsilon,\varepsilon) - f(0,0) - 0|}{\sqrt{2}\,\varepsilon} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \not\to 0.$

Also f bei $(0,0)$ nicht diffbar.

4.)

a.) $z(x,y) = x^2 - 2y^2 + y^4$

$D_1 z(x,y) = \partial_x (x^2 - 2y^2 + y^4)$

$= 2x. \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$D_2 z(x,y) = -4y + 4y^3$

$= -4y(1-y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad y \in \{0, -1, 1\}.$

$D_{11} z(x,y) = \partial_x (2x) = 2$

$D_{22} z(x,y) = \partial_y (-4y(1-y^2))$

$= -4(1-y^2) + (-4y)(-2y)$

$= 12y^2 - 4$

Warum (Satz von H.A. Schwarz)

$D_{12} z(x,y) = D_{21} z(x,y)$

$= 0$

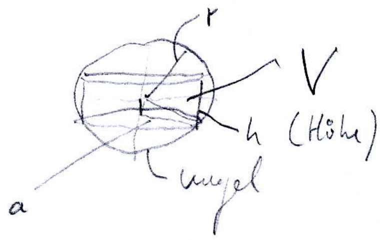
$\Rightarrow \quad D^2 z(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$

Bei $y = 0$: nicht definit, $\Rightarrow$ kein Extremum

bei $y \in \{-1, +1\}$: pos. definit $\Rightarrow$ Minima.

$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{(0,-1), (0,+1)\}.$

4.) b.)



$$V = Vol_{Zyl.}(h,r) \left(= h\cdot \overbrace{\sqrt{r^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}^{\,2}}^{a^2}\pi\right)$$

... direkt"

"

$\Downarrow$

$\frac{\partial V}{\partial h}=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{\;}^{\,2} - \frac{h\left(\frac{h}{2}\right)}{\sqrt{\;}} = 0$

$\Leftrightarrow r^2 - \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{2}$

$\Leftrightarrow \underline{r^2 = \frac{3}{4}\frac{h^2}{1}}$

mit <u>R.B.</u>: (Lagrange I):

$$V = h\cdot a^2\pi$$

Z.B.: $\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a^2 - r^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad F(h,a,\lambda) := h\cdot a^2\pi - \lambda\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 + a^2 - r^2\right)$$

1.) $\frac{\partial F}{\partial h} = a^2\pi - \frac{1}{2}\lambda h = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi a^2}{h}.$

2.) $\frac{\partial F}{\partial a} = 2\pi h a - 2\lambda a = 0$

$\Rightarrow \quad h = \frac{\lambda}{\pi} \overset{1)}{=} \frac{2a^2}{h}$

$\Rightarrow \quad \underline{h^2 = 2a^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{h = \sqrt{2}\,a}$

3.) $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow$ Z.B. $\Rightarrow \quad a^2 = r^2 - \frac{h^2}{4}$

$\Rightarrow \quad h^2 = 2\left(r^2 - \frac{h^2}{4}\right) \Rightarrow \frac{3}{2}h^2 = 2r^2$

5.) $F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow F = 0$ lokal bei $(1,1)$ stetig diff.bare Lsg.:

$$y = \varphi(x).$$

Wegen $\frac{dF}{dx}(x,\varphi(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\underbrace{\frac{d\varphi}{dx}(x)}_{=\frac{dy}{dx}}$:

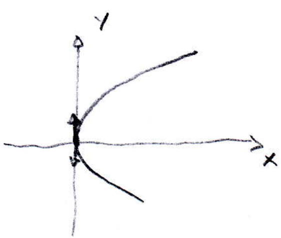
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{3x^2 - 2y}{3y^2 - 2x}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x)\Big|_{x=1} = \frac{dy}{dx}(1,1) = -\frac{1}{1} = -1.$$

Zusatzbeispiel: $y^2 = x \Rightarrow F(x,y) = y^2 - x$

$\rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \neq 0$ für $y \neq 0$.

sonst lokal lösbar durch stetig diff.bare Funktion $y = \varphi(x)$.



$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ bedeutet:

„F ändert sich erstmal nicht."

6.) $u(x) = h(|x|)$ $\qquad \nu(x) = \frac{x}{|x|}$

$\Rightarrow \nabla u(x) = h'(|x|) \cdot \frac{x}{|x|}$

$$\Rightarrow \int_K \Delta u(x)\, dx \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial K} \langle \nabla u(x), \nu(x) \rangle \, dS(x)$$

normierter Normalenvektor

$$= \int_{\partial K} h'(|x|) \underbrace{\left\langle \frac{x}{|x|}, \frac{x}{|x|} \right\rangle}_{=1} dS(x)$$

$$= h'(1) \underbrace{\int_{\partial K} dS(\omega)}$$

$$= h'(1)\, \omega_n$$

Achtung: (*)

$$\cosh ir = \frac{1}{2}\left(e^{ir} + e^{-ir}\right) = \cos r$$

$$\int_{|z|=5} \frac{e^z}{\cosh z}\, dz$$

$$\cosh z = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = 0$$

$z = r + is$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^{-r}(\cos s - i \sin s) + e^{r}(\cos s + i \sin s)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^{-r} + e^{r}\right)\cos s + i \sin s \cdot \frac{1}{2}\left(e^{r} - e^{-r}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cosh(r) \cdot \cos s + i \sinh(r) \cdot \sin s = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\cosh(r)}_{>0} \cdot \cos s = 0 \ \wedge \ \sinh(r) \cdot \sin s = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s \in \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{N}\right\} \ \wedge \ r = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{U} = \left\{ r + is = 0 + i\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{U} \cap \{|z| \leq 5\} = \left\{-i\,3\frac{\pi}{2}, -i\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}, i\frac{3\pi}{2}\right\}.$$

$$\Rightarrow \quad \int_{|z|=5} \frac{e^z}{\cosh z}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

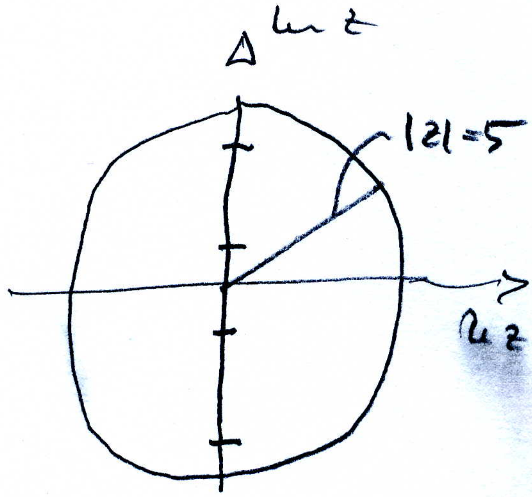
z.B.:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, i\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{z \to i\frac{\pi}{2}} \left(z - i\frac{\pi}{2}\right) \frac{e^z}{\cosh z} \overset{(*)}{=} \lim_{s \to \frac{\pi}{2}} \left(is - i\frac{\pi}{2}\right)\frac{e^{is}}{\cos s}$$

$$= \lim_{s \to \frac{\pi}{2}} i\left(s - \frac{\pi}{2}\right) \frac{e^{is}}{\left(-\sin\left(s - \frac{\pi}{2}\right)\right)} = \left(\lim_{s \to \frac{\pi}{2}} -i e^{is}\right) = \underline{+1} \Bigg\}^{\cdots} \Rightarrow \int_{|z|=5} \frac{e^z}{\cosh z}\, dz = \underline{8\pi i.}$$

alternativ:

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{-z} + e^{z}\right) = 0$$



$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^{2z} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{2z} = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2z \in \{\, i\cdot(2n+1)\pi \; : \; n \in \mathbb{Z} \,\}$$

$$\Leftrightarrow \quad z \in \left\{\, i\,\frac{2n+1}{2}\pi \; : \; n \in \mathbb{Z} \,\right\} =: \mathbb{L}$$

$$\mathbb{L} \cap \{\, z : |z| \le 5 \,\} = \underline{\{\, i(n+\tfrac{1}{2})\pi \; : \; n \in \{-2,-1,0,1\} \,\}}$$

Dann: $\operatorname{Res}(f, z_0) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{\cosh z}, z_0\right)$

$$= \frac{e^{z_0}}{\frac{d}{dz}\cosh z\Big|_{z=z_0}} = \frac{e^{z_0}}{\sinh z_0}$$

$$z_0 = i\frac{\pi}{2} : \quad \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sinh i\frac{\pi}{2}} = \frac{i}{\frac{1}{2}\big(\underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i} - \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{=-i}\big)} = 1$$

... ebenso für andere Residuen.

$$\Rightarrow \quad \oint f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_0} \operatorname{Res}(f, z_0) = 8\pi i.$$