Operatoren auf Mannigfaltigkeiten - Notizen[1]

Jena - Sommersemester 2017

Marcel Schmidt

[1] Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Kommentare sind willkommen.

KAPITEL 1

Riemannsche Mannigfaltigkeiten

1. Topologische Mannigfaltigkeiten

Definition (Topologische Mannigfaltigkeit)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein topologischer Raum $(M, \mathcal{T})$ heißt *topologische n-dimensionale Mannigfaltigkeit* (oder kurz *n-Mannigfaltigkeit*), falls er die folgenden Bedingungen erfüllt.

(M1) $(M, \mathcal{T})$ ist Hausdorffsch.

(M2) $(M, \mathcal{T})$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(M3) $(M, \mathcal{T})$ ist n-dimensional lokal euklidisch, das heißt jeder Punkt in M besitzt eine offene Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

Zeichnung

Bemerkung.

- Prinzipiell gibt es viele nicht homöomorphe Topologien $\mathcal{T}$ auf einer Menge M, die $(M, \mathcal{T})$ in eine topologischen Mannigfaltigkeit verwandeln. In konkreten Beispielen einigen wir uns oft auf eine 'kanonische' Topologie und bei beliebigen topologischen Mannigfaltigkeiten spielt ihre konkrete Gestalt keine Rolle. Deshalb lassen wir $\mathcal{T}$ oft weg und schreiben nur M statt $(M, \mathcal{T})$.
- In der obigen Definition ist der $\mathbb{R}^n$ natürlich mit DER üblichen Topologie versehen, die vom euklidischen Abstand induziert wird. Sie ist die einzige Topologie, für die $\mathbb{R}^n$ ein topologischer Vektorraum ist, d.h. für welche die Operationen
$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (x, y) \mapsto x + y$$
und
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$
stetig sind.

Definition (Karte)**.** Sei M eine n-Mannigfaltigkeit. Ein Paar (U, φ), bestehend aus eine offenen Teilmenge $U \subseteq M$ und einer Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, heißt *Karte*, falls $\varphi(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \to \varphi(U)$ ein Homöomorphismus ist. In diesem Fall heißt U *(lokales) Koordinatengebiet* und die durch die Gleichung
$$\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p)) \text{ für alle } p \in U$$

bestimmten Funktionen $x^i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, heißen *(lokale) Koordinatenfunktionen.* Eine Sammlung von Karten, deren Koordinatengebiete M überdecken, heißt *Atlas.*

Oft nutzt man die lokalen Koordinatenfunktionen um Kartengebiete mit ihrem Bild im $\mathbb{R}^n$ zu identifizieren. Wie wir später sehen werden, kann dies leicht zu Verwirrung führen. Man sollte daher stets im Kopf behalten, ob man auf der Mannigfaltigkeit oder im $\mathbb{R}^n$ rechnet. Wir geben nun einige Beispiele.

Beispiel ($\mathbb{R}^n$ und seine offenen Teilmengen)**.** Der $\mathbb{R}^n$ (mit DER üblichen Topologie) ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Die Identitätsabbildung

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\, x \mapsto x$$

ist eine (globale) Karte und $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ ist ein Atlas. Offenbar ist jede offene Teilmenge ausgestattet mit der Unterraumtopologie auch wieder eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Beispiel ($\mathbb{S}^n$)**.** Die n-dimensionale Sphäre

$$\mathbb{S}^n := \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = 1\}$$

versehen mit der Unterraumtopologie ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Für $i = 1, \ldots, n$ sei

$$U_i^+ := \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x^i > 0\}$$

und

$$U_i^- := \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x^i < 0\}.$$

Die Abbildungen

$$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$$
$$(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1}) \mapsto (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1})$$

sind Karten und deren Gesamtheit bildet einen Atlas für $\mathbb{S}^n$. Man kann leicht zeigen, dass $\mathbb{S}^n$ keinen Atlas besitzt, der nur aus einer Karte besteht (Übung).

Beispiel (Projektiver Raum)**.** Auf der offenen Menge $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definieren wir die folgende Äquivalenzrelation:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \text{ es existiert } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \lambda x = y.$$

Der n-dimensionale (reelle) projektive Raum ist die Menge

$$P^n(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

ausgestattet mit der Quotiententopologie. Ist

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to P^n(\mathbb{R})$$

die Quotientenabbildung, so ist $U \subseteq P^n(\mathbb{R})$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ (und damit offen in $\mathbb{R}^{n+1}$) ist. Der n-dimensionale (reelle) projektive Raum ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Für $i = 1, \ldots, n+1$ sind die Abbildungen

$$\varphi_i : \{[(x_1, \ldots, x_{n+1})] \in P^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\} \to \mathbb{R}^n$$
$$[(x_1, \ldots, x_{n+1})] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

Karten und ihre Gesamtheit bildet einen Atlas für $P^n(\mathbb{R})$ (Übung).

Beispiel (Matrizen)**.** Der Raum der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$, den wir mit $M_n(\mathbb{R})$ bezeichnen, ist ein n^2-dimensionaler Vektorraum. Ausgestattet mit der üblichen Topologie des $\mathbb{R}^{n^2}$ ist er eine Topologische n^2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Der Raum der invertierbaren Matrizen $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det M \neq 0\}$ ist eine offene Teilmenge von $M_n(\mathbb{R})$ und damit in natürlicher Weise auch eine n^2-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Das folgende bemerkenswerte Theorem zeigt, dass die Dimension einer (nichtleeren) topologischen Mannigfaltigkeit eindeutig festgelegt ist.

Theorem (Topologische Invarianz der Dimension)**.** *Eine nichtleere n-Mannigfaltigkeit kann nur dann zu einer m-Mannigfaltigkeit homöomorph sein, wenn $m = n$.*

Beweis. Siehe [**3**, Theorem 17.26]. □

Es gibt prinzipiell zwei Zugänge um die topologische Invarianz der Dimension zu beweisen. Zum einen kann man algebraische Topologie (singuläre Homologie oder DeRham Kohomologie) verwenden oder aber man benutzt folgendes Resultat über die Invarianz von Gebieten im $\mathbb{R}^n$. Es ist eine (mehr oder weniger direkte) Folgerung aus dem Fixpunktsatz von Brouwer.

Theorem (Topologische Invarianz von Gebieten)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine stetige injektive Abbildung. Dann ist $f(\Omega)$ ein Gebiet.*

Bemerkung. Üblicherweise wird in einer Analysis II Vorlesung der Satz über die Inverse Abbildung bewiesen. Das vorige Theorem verallgemeinert eine Teilaussage dieses Satzes, nämlich die dass das Bild einer stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarer Ableitung offen ist.

2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Die lineare Struktur des $\mathbb{R}^n$ erlaubt es uns, differenzierbare Abbildungen (genügend gute Abbildungen) durch lineare Abbildungen (einfache

Abbildungen) zu approximieren. Die gewohnten Begriffe "Differenzierbarkeit" und "lineare Abbildung" lassen sich nicht direkt auf beliebige Mannigfaltigkeiten übertragen, da sie im Allgemeinen keine (oder keine kanonische) Vektorraumstruktur besitzen.

Den Begriff der differenzierbaren Funktion führt man daher mithilfe lokaler Koordinatendarstellungen der Funktion ein, wobei die betrachteten Karten gewisse Verträglichkeitseigenschaften besitzen müssen. Ableitungen werden dann einem nächsten Schritt (im nächsten Abschnitt) als lineare Abbildungen zwischen den Tangentialräumen (lineare Approximationen der Mannigfaltigkeiten) interpretiert.

Erinnerung: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt k-mal stetig differenzierbar (oder C^k-Abbildung), falls alle partiellen Ableitungen k-ter Ordnung existieren und stetig sind. Ferner heißt f *glatt* oder *C^∞-Abbildung*, falls sie für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine C^k-Abbildung ist.

Definition (C^k-Atlas)**.** Sei M eine Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Zwei Karten (U, φ) und (V, ψ) heißen *C^k-verbunden*, falls die *Kartenwechsel*

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

und

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

C^k-Abbildungen sind. Ein Atlas heißt *C^k-Atlas*, falls alle Paare von Karten in ihm C^k-verbunden sind.

Definition (Differenzierbare Mannigfaltigkeit)**.** Sei M eine Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ein bezüglich Mengeninklusion maximaler C^k-Atlas $\mathcal{D}$ heißt *differenzierbare Struktur der Ordnung k* oder kurz *C^k-Struktur* und das Paar $(M, \mathcal{D})$ heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit der Ordnung k* oder kurz *C^k-Mannigfaltigkeit*. Eine C^∞-Struktur wird auch *glatte Struktur* und eine C^∞-Mannigfaltigkeit auch *glatte Mannigfaltigkeit* genannt.

Die Maximalität einer differenzierbaren Struktur macht es sehr schwer (praktisch unmöglich) sie explizit anzugeben. Das folgende Lemma zeigt, dass das aus der Maßtheorie und Topologie bekannte Erzeugerprinzip auch für differenzierbare Strukturen nützlich ist.

Lemma (Erzeugung differenzierbarer Strukturen)**.** *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein C^k-Atlas. Dann existiert eine eindeutige differenzierbare Struktur $\mathcal{D}$ der Ordnung k, mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$.*

Beweis. Übung. □

Die eindeutige differenzierbare Struktur $\mathcal{D}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ heißt die *von $\mathcal{A}$ erzeugte differenzierbare Struktur*.

Beispiel. Alle angegebenen Atlanten aus den vorigen Beispielen, $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$, projektive Räume und Matrixräume, sind C^∞-verknüpft. Ausgestattet mit den von ihnen erzeugten glatten Strukturen sind diese Mannigfaltigkeiten also glatte Mannigfaltigkeiten.

Bemerkung.

- Differenzierbare Strukturen sind ein extra Stück an Information. Jede Mannigfaltigkeit die eine glatte Struktur besitzt, hat automatisch überabzählbar viele verschiedene glatte Strukturen. Diese müssen sich aber nicht wesentlich unterscheiden. So gibt es etwa auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \neq 4$ im wesentlichen (bis auf Diffeomorphie (s.u.)) nur eine glatte Struktur, aber auf $\mathbb{R}^4$ überabzählbar viele wesentlich verschiedene (nicht diffeomorphe) glatte Strukturen.
- Falls klar ist welche differenzierbare Struktur wir betrachten, lassen wir sie weg und schreiben nur M statt $(M, \mathcal{D})$. Insbesondere verstehen wir unter $\mathbb{R}^n$ immer die glatte Mannigfaltigkeit, die mit der üblichen Topologie und der von $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\}$ erzeugten glatten Struktur ausgestattet ist.
- Ist $(M, \mathcal{D})$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge, so erbt U in natürlicher Weise die differenzierbare Struktur
$$\mathcal{D}_U := \{(V, \psi) \in \mathcal{D} \mid V \subseteq U\}.$$
Wir betrachten offene Teilmengen stets als glatte Mannigfaltigkeiten ausgestattet mit dieser Struktur.

Mithilfe differenzierbarer Strukturen definieren wir nun differenzierbare Abbildungen und Diffeomorphismen.

Definition (Differenzierbare Abbildung)**.** Es seien $(M, \mathcal{D})$ und $(N, \mathcal{E})$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *k-mal stetig differenzierbar* oder *C^k-Abbildung*, falls für alle $p \in M$ eine Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ mit $p \in U$ und eine Karte $(V, \psi) \in \mathcal{E}$ mit $f(U) \subseteq V$ existiert, sodass
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$
eine C^k-Abbildung ist. Die Menge aller C^k-Abbildungen von M nach N bezeichnen wir mit $C^k(M, N)$. Eine Abbildung $f \in C^k(M, N)$ heißt *C^k-Diffeomorphismus*, falls f bijektiv ist und $f^{-1} \in C^k(N, M)$. Eine C^∞-Abbildung wird auch *glatte Abbildung* genannt.

Für die Definition von Differenzierbarkeit benötigt man keine Glattheitsannahme an die differenzierbaren Strukturen. Dies wird jedoch dann notwendig, wenn differenzierbare Funktionen mithilfe des Erzeugerprinzips charakterisiert werden und die Unabhängigkeit der Differenzierbarkeit von der Wahl der Karten gewährleistet sein soll. Wir formulieren die Kriterien hier nur für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^n$, es gilt natürlich auch allgemeiner.

Lemma (Charakterisierung differenzierbarer Funktionen mittels Erzeugerprinzip)**.** *Es sei* $(M, \mathcal{D})$ *eine* C^k*-Mannigfaltigkeit und* $\mathcal{A}$ *ein* $\mathcal{D}$ *erzeugender* C^k*-Atlas. Für eine Abbildung* $f : M \to \mathbb{R}^n$ *und* $1 \leq l \leq k$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) $f \in C^l(M, \mathbb{R}^n)$.

(ii) *Für alle* $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ *ist*
$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$$
eine C^l*-Abbildung. (Charakterisierung mittels Erzeuger)*

(iii) *Für alle* $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ *ist*
$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$$
eine C^l*-Abbildung. (Unabhängigkeit von der Wahl der Karte)*

Beweis. Übung. □

Beispiel ($\mathbb{R}^n$)**.** Das vorige Lemma zeigt, dass die von dem Atlas $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\}$ erzeugte glatte Struktur auf $\mathbb{R}^n$ den "üblichen" Differenzierbarkeitsbegriff liefert.

Ende 2. Vorlesung

Beispiel ($\mathbb{R}$ mit anderen differenzierbaren Strukturen)**.** Für $\alpha > 0$ sei
$$\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{sgn}(x) \cdot |x|^\alpha.$$
Mit $\mathcal{D}_\alpha$ bezeichnen wir die von der Karte $\{(\mathbb{R}, \varphi_\alpha)\}$ erzeugte glatte Struktur auf $\mathbb{R}$. Für $\alpha \neq \beta$ sind $\mathcal{D}_\alpha$ und $\mathcal{D}_\beta$ verschieden, da φ_α und φ_β in diesem Fall nicht C^∞-verbunden sind. Es ist aber
$$\varphi_\alpha : (\mathbb{R}, \mathcal{D}_\alpha) \to \mathbb{R}$$
ein Diffeomorphismus. Somit unterscheiden sich die differenzierbaren Strukturen $\mathcal{D}_\alpha$ und $\mathcal{D}_\beta$ nicht wesentlich.

Beispiel (Koordinatenfunktionen)**.** Sei $(M, \mathcal{D})$ eine glatte n - Mannigfaltigkeit und $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ eine Karte. Die zugehörigen Koordinatenfunktionen $x^i : U \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$, sind C^∞-Funktionen auf U.

Konvention: Von nun an verwenden wir die Begriffe "Karte" und "Karte aus der differenzierbaren Struktur" synonym. Nur falls wir die Glattheitseigenschaften der Karten hervorheben wollen, schreiben wir glatte Karte für Karten aus der differenzierbaren Struktur.

Im Folgenden schreiben wir $C^\infty(M)$ statt $C^\infty(M, \mathbb{R})$ und bezeichnen mit $C_c^\infty(M)$ die Funktionen aus $C^\infty(M)$ mit kompaktem Träger.

Theorem (Existenz glatter Abschneidefunktionen und Partitionen der Eins)**.** *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $K \subseteq M$ kompakt. Für jede endliche offene Überdeckung $U_1, \dots, U_k$ von K existieren nichtnegative $\varphi_i \in C_c^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp} \varphi_i \subseteq U_i$, sodass $\sum_{i=1}^k \varphi_i = 1$ in einer offenen Umgebung von K und $\sum_{i=1}^k \varphi_i \leq 1$ auf M.*

Beweis. Der Beweis kann im Prinzip wie die entsprechende Aussage im $\mathbb{R}^n$ geführt werden. Siehe [**2**, Theorem 3.5]. □

Das vorherige Theorem gilt auch allgemeiner für beliebige lokal-endliche Überdeckungen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, siehe [**3**, Theorem 2.23]. Eine wichtige Folgerung ist die Fortsetzbarkeit differenzierbarer Abbildungen.

Lemma (Fortsetzung glatter Funktionen)**.** *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \in M$ offen. Für jedes $f \in C^\infty(U)$ und jede kompakte Menge $K \subseteq U$ existiert ein $F \in C^\infty(M)$ mit $F = f$ auf K.*

Beweis. Sei φ eine glatte Abschneidefunktion auf M mit $\varphi = 1$ auf K und $\operatorname{supp} \varphi \subseteq U$. Wir definieren

$$F = \begin{cases} f\varphi & \text{auf } U, \\ 0 & \text{auf } M \setminus U. \end{cases}$$

Die Funktion F ist glatt und hat die gewünschten Eigenschaften. □

3. (Ko-)Tangentialraum und (Ko-)Tangentialbündel

Für den Rest des Kurses betrachten wir nur noch glatte Mannigfaltigkeiten. Dies ist zwar an einigen Stellen nicht zwingend notwendig, erlaubt es uns aber auf das Zählen von Ableitungsordnungen zu verzichten. Insbesondere verwenden wir ab sofort den Begriff Karte als Synonym für Karte aus der glatten Struktur.

Definition (Derivation und Tangentialraum)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Eine $\mathbb{R}$-*Derivation im Punkt* p ist eine lineare Abbildung

$$\xi : C^\infty(M) \to \mathbb{R},$$

welche die Produktregel

$$\xi(fg) = f(p)\xi(g) + g(p)\xi(f)$$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllt. Die Menge aller $\mathbb{R}$-Derivationen im Punkt p wird mit T_pM bezeichnet und heißt *Tangentialraum im Punkt* p.

Durch Punktweise definierte Addition und Multiplikationen mit Skalaren ist der Tangentialraum in natürlicher Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man kann ihn auch als Teilraum des (algebraischen) Dualraumes von $C^\infty(M)$ auffassen.

Beispiel. (Partielle Ableitungen bezüglich lokaler Koordinaten) Sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit und (U, φ) eine Karte mit den Koordinatenfunktionen $x^i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Für $f \in C^\infty(M)$ definieren wir die Funktion $\frac{\partial}{\partial x^i} f : U \to \mathbb{R}$ durch

$$p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} f(p) := \partial_i \left[f \circ \varphi^{-1} \right] (\varphi(p)),$$

wobei ∂_i die übliche partielle Ableitung bezüglich der i-ten Koordinate im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Dann ist

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} f(p)$$

eine $\mathbb{R}$-Derivation in p. Der Zusammenhang zwischen $\frac{\partial}{\partial x^i}$ und der Funktion x^i wird später noch deutlich und die Bezeichnung gerechtfertigt.

Bemerkung (Einsteinsche Summenkonvention)**.** Um Formeln übersichtlicher zu gestalten, verwenden von nun an die Einsteinsche Summenkonvention. Tauchen in einer Formel die gleichen Indizes sowohl oben als auch unten auf, so wird über sie summiert. Sind etwa $e_1, \dots, e_n$ Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum V und $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in \mathbb{R}$, so ist

$$\lambda^i e_i = \sum_{i=1}^n \lambda^i e_i.$$

Wir verwenden untere Indizes für Basisvektoren in V und obere Indizes für Koeffizienten der Basisdarstellung. Im dualen Vektorraum V^* handhaben wir es genau umgekehrt, dort verwenden wir obere Indizes für Basisvektoren und untere Indizes für die Koeffizienten der Basisdarstellung. Ist $e_1, \dots, e_n$ eine Basis in V, so ist die zugehörige duale Basis $e^1, \dots, e^n$ definiert durch

$$e^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Ist $v = v^i e_i \in V$ und $\xi = \xi_j e^j \in V^*$, so gilt

$$\xi(v) = v^i \xi(e_i) = v^i \xi_j e^j(e_i) = v^i \xi_j \delta_i^j = v^i \xi_i.$$

Ist $g : V \times V \to \mathbb{R}$ eine bilineare Abbildung und sind $v = v^i e_i$ und $w = w^j e_j$ Elemente von V, so gilt

$$g(v, w) = g(e_i, e_j) v^i w^j = g_{ij} v^i w^j,$$

wobei $g_{ij} := g(e_i, e_j)$. Die Koeffizienten g_{ij} können als Koeffizienten der Darstellung von g im Raum $V^* \otimes V^*$ bezüglich der Basis $e^i \otimes e^j, i, j = 1, \dots, n$, verstanden werden.

Theorem (Basis des Tangentialraumes). *Es sei M eine glatte n - Mannigfaltigkeit. Für alle $p \in M$ ist T_pM ein n - dimensionaler Vektorraum. Ist (U, φ) eine Karte mit $p \in U$ und lokalen Koordinatenfunktionen x^i, $i = 1, \ldots, n$, so ist $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, $i = 1, \ldots, n$, eine Basis in T_pM und für alle $\xi \in T_pM$ gilt*

$$\xi = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \text{ wobei } \xi^i = \xi(x^i).$$

Bemerkung.

- Wir haben die Einsteinsche Summenkonvention bereits in der Formulierung des vorigen Theorems verwendet. Der Index i in $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ zählt hier als unterer Index.
- Der Ausdruck $\xi(x^i)$ macht eigentlich keinen Sinn, da x^i nur auf $U \subseteq M$ und nicht auf ganz M definiert ist. Wir werden aber unten sehen, dass T_pM und T_pU auf natürliche Weise isomorph sind. Dadurch kann eine Derivation in p auf M auch als Derivation in p auf U aufgefasst werden, sodass der Ausdruck $\xi(x^i)$ definiert ist.

Ende 3. Vorlesung

Es ist leicht zu sehen, dass die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, $i = 1, \ldots, n$, linear unabhängig sind. Bevor wir nun ihre Vollständigkeit beweisen können, benötigen wir einige Hilfsaussagen.

Lemma (Satz von Taylor auf Mannigfaltigkeiten). *Sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit und sei (U, φ) eine Karte mit lokalen Koordinatenfunktionen x^i, $i = 1, \ldots, n$. Für jedes $p \in U$ existiert eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von p, sodass für jedes $f \in C^\infty(M)$ Funktionen $h_{ij} \in C^\infty(V)$ existieren, sodass für alle $q \in V$ gilt*

$$f(q) = f(p) + (x^i(q) - x^i(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} f(p) + (x^i(q) - x^i(p))(x^j(q) - x^j(p)) h_{ij}(q).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Beweis vom Satz von Taylor im mehrdimensionalen angewendet auf die C^∞-Funktion

$$\bar{f} := f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Hier sind die Details. Da Verschiebung glatte Funktionen sind, nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $\varphi(p) = 0$. Ferner wählen wir eine offene Kugel $U_r(0) \subseteq \varphi(U)$. Für $\bar{x} \in U_r(0)$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{x}) &= \bar{f}(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} \bar{f}(t\bar{x})\, dt \\ (\text{Kettenregel im } \mathbb{R}^n) &= \bar{f}(0) + \bar{x}^i \int_0^1 \partial_i \bar{f}(t\bar{x})\, dt \\ &= \bar{f}(0) + \bar{x}^i \bar{h}_i(\bar{x}). \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\bar{x}^i$ die Koordinaten von $\bar{x}$ bezüglich der Standardbasis im $\mathbb{R}^n$ und $\bar{h}_i = \int_0^1 \partial_i f(t\cdot)\,dt$ ist eine glatte Funktion auf $U_r(0)$, welche $\bar{h}_i(0) = \partial_i \bar{f}(0)$ erfüllt. Wenden wir diese Rechnung nun nochmal auf $\bar{h}_i$ statt auf $\bar{f}$ an, so erhalten wir glatte Funktionen $\bar{h}_{ij}$ auf $U_r(0)$ mit $\bar{h}_i = \partial_i \bar{f}(0) + x^j \bar{h}_{ij}$. Nun setzen wir $V := \varphi^{-1}(U_r(0))$ und $h_{ij} := \bar{h}_{ij} \circ \varphi$ und erhalten die gewünschte Aussage. □

Lemma (Derivationen sind lokale Operatoren)**.** *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\xi \in T_pM$. Sind $f, g \in C^\infty(M)$ mit $f = g$ auf einer Umgebung von p, so gilt $\xi(f) = \xi(g)$.*

Beweis. Sei U eine offene Umgebung von p, sodass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in U$ gilt und sei $K \subseteq U$ eine kompakte Umgebung von p. Wir wählen eine glatte Abschneidefunktion φ mit $\varphi = 1$ in K und $\operatorname{supp} \varphi \subseteq U$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \xi(f-g) &= \xi(\varphi(f-g)) + \xi((1-\varphi)(f-g)) \\ &= \xi((1-\varphi)(f-g)) \\ \text{(Produktregel)} &= (1-\varphi(p))\xi(f-g) + (f(p)-g(p))\xi(1-\varphi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität von ξ folgt $\xi(f) = \xi(g)$. □

Lemma. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen. Für $p \in U$ ist die Abbildung*

$$\iota : T_pU \to T_pM,\ \iota(\xi)(f) := \xi(f|_U)$$

ein Vektorraumisomorphismus. Ist (V, φ) eine glatte Karte für M mit $p \in V$, so bildet ι den Vektor $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ (aufgefasst als Derivation auf $C^\infty(U)$ bezüglich der Karte $(U \cap V, \varphi|_U)$) auf den Vektor $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ (aufgefasst als Derivation auf $C^\infty(M)$ bezüglich der Karte (V, φ)) ab.

Beweis. Die Glattheit von Einschränkungen von glatten Funktionen folgt aus der Wahl der differenzierbaren Struktur auf offenen Teilmengen von M. Deshalb ist ι wohldefiniert. Die Injektivität und Surjektivität von ι sind Konsequenzen der Lokalität von Derivationen und der Fortsetzbarkeit von glatten Funktionen (Übung). □

Beweis. (Theorem über eine Basis des Tangentialraumes). Es sei $p \in M$, (U, φ) eine glatte Karte und $V \subseteq U$ eine relativkompakte offene Umgebung von p, für die der Satz von Taylor (s.o.) gilt. Wegen des vorigen Lemmas genügt es die Aussage für die glatte Mannigfaltigkeit V und die Karte $(V, \varphi|_V)$ zu zeigen. Wir nehmen wieder an, dass $\varphi(p) = 0$

und damit $x^i(p) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, gilt. Ist $f \in C^\infty(V)$ und $\xi \in T_pV$, so zeigen der Satz von Taylor und die Definition von $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, dass

$$\begin{aligned}\xi(f) &= \xi(f(p)) + \xi(x^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(p)) + \xi(x^i x^j h_{ij}) \\ &= \xi(f(p)) + \xi(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) + \xi(x^i x^j h_{ij}),\end{aligned}$$

mit geeigneten $h_{ij} \in C^\infty(V)$. Wegen der Produktregel

$$\xi(1) = \xi(1 \cdot 1) = 1 \cdot \xi(1) + 1 \cdot \xi(1) = 2\xi(1)$$

gilt $\xi(1) = 0$ und damit $\xi(f(p)) = f(p)\xi(1) = 0$. Weiterhin impliziert die Produktregel und die Identität $x^i(p) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, die Gleichung

$$\xi(x^i x^j h_{ij}) = x^i(p)\xi(x^j h_{ij}) + x^j(p) h_{ij}(p)\xi(x^i) = 0.$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Bemerkung (Funktionenkeime)**.** Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$, so kann man auf $C^\infty(M)$ folgende Äquivalenzrelation einführen:

$$f \sim g :\Leftrightarrow \text{es gilt } f = g \text{ auf einer Umgebung von } p.$$

Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation nennt man glatte Funktionenkeime in p. Die Menge aller glatten Funktionenkeime in p erbt in natürlicher Weise die Struktur einer $\mathbb{R}$-Algebra von $C^\infty(M)$. Ein wesentlicher Schritt im Beweis des vorigen Theorems war es zu zeigen, dass eine Derivation auf $C^\infty(M)$ im Punkt p auch als Derivation auf den Funktionenkeimen in p aufgefasst werden kann.

Bemerkung (Tangentialraum des $\mathbb{R}^n$)**.** Die globale Karte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ liefert eine globale Identifizierung von $\mathbb{R}^n$ mit $T_p\mathbb{R}^n$. Diese ist in gewisser Weise kanonisch (siehe Übung).

Alternativ kann der Tangentialraum auch mittels Äquivalenzklassen von Kurven beschrieben werden. Diese Sichtweise ist zwar besonders anschaulich, aber die Vektorraumstruktur des Tangentialraumes ist bei diesem Zugang nicht sofort ersichtlich.

Es sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Zu einer glatten Kurve $\gamma : I \to M$ und $t \in I$ assoziieren wir die Richtungsableitung

$$\dot\gamma(t) : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto (f \circ \gamma)'(t).$$

Die folgende Proposition zeigt, dass der Tangentialraum auch als Raum der Richtungsableitungen von Kurven interpretiert werden kann.

Proposition. *Es sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : I \to M$ eine glatte Kurve. Für alle $t \in I$ gilt $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Ist $p \in M$ gegeben, so ist die Abbildung*

$$\{\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \mid \varepsilon > 0, \gamma \text{ glatt mit } \gamma(0) = p\} \to T_pM$$
$$\gamma \mapsto \dot\gamma(0)$$

surjektiv.

Beweis. Übung. □

Es ist natürlich möglich, dass unterschiedliche Kurven dieselbe Derivation auf $C^\infty(M)$ erzeugen. Identifiziert man solche Kurven, so erhält man eine alternative Beschreibung des Tangentialraumes im Punkt p durch Äquivalenzklassen glatter Kurven durch p.

Definition (Kotangentialraum)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Der zu T_pM duale Vektorraum T_pM^* heißt *Kotangentialraum in p.*

Beispiel (Differential einer Funktion)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Das *Differential von $f \in C^\infty(M)$ im Punkt p* ist definiert als

$$df_p : T_pM \to \mathbb{R}, df_p(\xi) := \xi(f).$$

Offensichtlich gehört df_p zum Kotangentialraum im Punkt p. Die Definition des Differentials entspricht ganz der Philosophie, dass die Ableitung die Funktion durch eine lineare Funktion annähert. Identifiziert man den Tangentialraum $T_{f(p)}\mathbb{R}$ mittels der globalen Karte $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}$ selbst, so kann das Differential als lineare Abbildung $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$ aufgefasst werden. Es wird also sowohl die Abbildung als auch die Mannigfaltigkeit durch lineare Strukturen approximiert. Diese Konstruktion lässt sich auch auf Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten verallgemeinern (siehe Übung).

Proposition (Basis im Kotangentialraum)**.** *Es sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Ist (U, φ) eine Karte mit $p \in U$ und lokalen Koordinatenfunktionen x^i, $i = 1, \ldots, n$, so ist $dx^i_p, i = 1, \ldots, n$, eine Basis in T_pM^*. Sie ist die duale Basis zu $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, $i = 1, \ldots, n$. Ist $f \in C^\infty(M)$, so gilt*

$$df_p = \frac{\partial}{\partial x^i} f(p) dx^i_p.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $dx^i_p, i = 1, \ldots, n$, die zu $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, $i = 1, \ldots, n$, duale Basis ist. Dazu berechnen wir

$$dx^j_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (x^j) = \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)(p) = \delta^j_i.$$

Hier haben wir verwendet, dass $x^j \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ die j-te Koordinatenabbildung auf dem $\mathbb{R}^n$ ist. $\square$

Ende 4. Vorlesung

Bisher haben wir Tangentialraum und Kotangentialraum in jedem Punkt separat behandelt. Es liegt natürlich nahe, die (Ko)-Vektorwertigen Funktionen $p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ oder $p \mapsto df_p$ zu betrachten und auf Stetigkeitseigenschaften bzw. Glattheitseigenschaften zu untersuchen. Dazu interpretieren wir sie als (glatte) Schnitte in den folgenden Vektorbündeln.

Definition ((Ko-)Tangentialbündel)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Die Mengen

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

beziehungsweise

$$TM^* := \bigsqcup_{p \in M} T_pM^* = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM^*$$

heißen *Tangentialbündel* bzw. *Kotangentialbündel.* Mit $\pi : TM \to M$, $(p, \xi) \mapsto p$, bzw. $\pi^* : TM^* \to M$, $(p, v) \mapsto p$, bezeichnen wir die Projektion auf die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit.

Die Fasern $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_pM$ und $(\pi^*)^{-1}(p) = \{p\} \times T_pM^*$ identifizieren wir im Folgenden stets mit T_pM und T_pM^*.

Definition (Vektorfeld und Kovektorfeld)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $U \subseteq M$ offen. Eine Abbildung $X : U \to TM$, $p \mapsto X_p$ heißt *(lokales) Vektorfeld*, falls $\pi \circ X = \mathrm{id}_U$ (d.h. $X_p \in T_pM$ für alle $p \in U$). Ein Vektorfeld heißt *glatt*, falls für alle $f \in C^\infty(M)$ die Abbildung

$$U \to \mathbb{R},\ p \mapsto X_p(f)$$

glatt ist. Die Menge aller glatten Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}(M)$.

Eine Abbildung $\omega : U \to TM^*$, $p \mapsto \omega_p$ heißt *(lokales) Kovektorfeld*, falls $\pi^* \circ \omega = \mathrm{id}_U$ (d.h. $\omega_p \in T_pM^*$ für alle $p \in U$). Ein Kovektorfeld heißt *glatt*, falls für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Abbildung

$$U \to \mathbb{R},\ p \mapsto \omega_p(X_p)$$

glatt ist. Die Menge aller glatten Kovektorfelder auf M bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}(M)^*$.

Beispiel. Ist (U, φ) eine glatte Karte, so ist die Abbildung

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \to TM, p \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

ein glattes Vektorfeld und

$$dx^i : U \to TM^*, p \mapsto dx^i_p$$

ein glattes Kovektorfeld.

Bemerkung. Durch punktweise definierte Addition und Skalarenmultiplikation sind die Räume der glatten Vektorfelder $\mathfrak{X}(M)$ und Kovektorfelder $\mathfrak{X}(M)^*$ in natürlicher Weise $\mathbb{R}$-Vektorräume. Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$, so definieren wir

$$f \cdot X : U \to TM,\ p \mapsto f(p)X_p.$$

Es ist fX offensichtlich ein glattes Vektorfeld. In diesem Sinne erhält $\mathfrak{X}(M)$ die Struktur eines $C^\infty(M)$-Moduls.

Ist (U, φ) eine Karte und $X : U \to TM$ ein Vektorfeld, so lässt es sich in lokalen Koordinaten schreiben als

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ wobei } X^i : U \to \mathbb{R}, p \mapsto X_p(x^i).$$

Es ist X genau dann glatt, wenn die Funktionen X^i glatt sind (Übung).

Bemerkung (Differenzierbare Struktur auf Tangentialbündel)**.** Es sei $(M, \mathcal{D})$ eine differenzierbare n - Mannigfaltigkeit. Für eine glatte Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ mit lokalen Koordinatenfunktionen x^i, $i = 1, \ldots, n$, definieren wir auf TM die Funktion

$$\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, \left(p, \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \right) \mapsto (\varphi(p), \xi^1, \ldots, \xi^n).$$

Statten wir TM mit der Initialtopologie

$$\widetilde{\mathcal{T}} := \{(\widetilde{\varphi})^{-1}(O) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{D} \text{ und } O \subseteq \mathbb{R}^{2n} \text{ offen}\}$$

aus, so ist $(TM, \widetilde{\mathcal{T}})$ eine $2n$-Mannigfaltigkeit und

$$\widetilde{\mathcal{D}} := \{(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{D}\}$$

eine differenzierbare Struktur auf M. Ein lokales Vektorfeld auf M ist genau dann glatt, wenn $X : U \to (TM, \widetilde{\mathcal{D}})$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist (Übung). Ähnliches gilt für das Kotangentialbündel.

Lokal ist das Tangentialbündel (nach Definition der Topologie auf TM) homöomorph zu $O \times \mathbb{R}^n$, wobei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Die globale Topologie der Mannigfaltigkeit TM hängt dagegen stark von M ab und ist sehr interessant.

4. Untermannigfaltigkeiten

Offene Teilmengen einer glatten n - Mannigfaltigkeit erben in natürlicher Weise die Struktur einer glatten n - Mannigfaltigkeit. Für gewisse andere niederdimensionale Teilmengen ist dies auch möglich. Durch diese Prozedur erhalten wir viele (in einem gewissen Sinne alle) wichtige Beispiele.

Definition (Untermannigfaltigkeit)**.** Es sei M eine glatte n - Mannigfaltigkeit und $m \leq n$. Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt *m - dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit*, falls für alle $p \in S$ eine glatte Karte (U, φ) von M mit lokalen Koordinatenfunktionen $x^i : U \to \mathbb{R}$ existiert, mit $p \in U$ und

$$S \cap U = \{q \in U \mid x^{m+1}(q) = \ldots = x^n(q) = 0\}.$$

Eine solche Karte heißt *glatter m-Schnitt für S*.

Zeichnung

Für $m \leq n$ bezeichnen wir mit $\pi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Projektion auf die ersten m Koordinaten, das heißt

$$\pi_m((x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}, \ldots, x^n)) := (x^1, \ldots, x^m).$$

Proposition. *Es seien M eine glatte n - Mannigfaltigkeit und S eine m - dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit. Ausgestattet mit der Unterraumtopologie ist S eine m - Mannigfaltigkeit und die Menge*

$$\mathcal{A}_S = \{(U \cap S, \pi_m \circ \varphi|_{U \cap S}) \mid (U, \varphi) \text{ ist glatter } m\text{-Schnitt für } M\}$$

ist ein C^∞-verbundener Atlas für S.

Beweis. Dieser Beweis kann genauso geführt werden wie der für glatte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, siehe Übung. □

Im Folgenden statten wir eine Untermannigfaltigkeit S von einer gegebenen Mannigfaltigkeit M stets mit der Unterraumtopologie und der von $\mathcal{A}_S$ erzeugten glatten Struktur aus.

Beispiel. Glatte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, siehe Übung. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass jede glatte n - Mannigfaltigkeit zu einer glatten Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n+1}$ diffeomorph ist. Dieses Resultat nennt sich Einbettungssatz von Whitney, siehe [**3**, Theorem 6.15].

Ist $S \subseteq M$ eine glatte Untermannigfaltigkeit, so kann der Tangentialraum an S als Unterraum des Tangentialraumes an M aufgefasst werden. Für $p \in S$ definieren wir die lineare Abbildung

$$\iota_S : T_pS \to T_pM, \; \iota_S(\xi)(f) := \xi(f|_S).$$

Ist $f : M \to \mathbb{R}$ glatt, so ist $f|_S$ eine glatte Funktion auf S und somit die Abbildung ι_S wohldefiniert. Unter Verwendung von glatten Schnittkoordinaten rechnet man leicht nach, dass ι_S auch injektiv ist. Deshalb identifizieren wir T_pS mit $\iota_S(T_pS) \subseteq T_pM$. In der Interpretation von T_pM durch von glatten Kurven induzierte Derivationen gilt für diese Identifikation

$$T_pS = \{\dot\gamma(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ glatt}, \varepsilon > 0, \gamma(0) = p, \gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq S\}.$$

Für Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ entspricht dies der üblichen geometrische Deutung des Tangentialraumes, wenn der Tangentialraum von $\mathbb{R}^n$ über die globale Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert wird.

Zeichnung

5. Riemannsche Metriken

Bisher haben wir nur (differential-)topologische und keine geometrischen Konzepte kennengelernt. Um Geometrie als das Studium von geometrischen Objekten und ihren Kenngrößen zu betreiben, benötigen wir (mindestens) die Begriffe Länge und Volumen. Wir führen sie mittels riemannscher Metriken auf den Tangentialbündeln ein.

Definition (Riemannsche Metrik)**.** Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *(glatte) riemannsche Metrik* $\mathbf{g} = (\mathbf{g}(p))_{p\in M}$ auf M ist eine Familie von Skalarprodukten $\mathbf{g}(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, sodass für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Abbildung

$$M \to \mathbb{R},\ p \mapsto \mathbf{g}(p)(X_p, X_p)$$

glatt ist. Ist $\mathbf{g}$ eine riemannsche Metrik auf M, so heißt das Paar $(M, \mathbf{g})$ *riemannsche Mannigfaltigkeit.*

Bemerkung. Eine riemannsche Metrik ist keine Metrik im Sinne eines metrischen Raumes. Wir werden aber später sehen, dass jede riemannsche Metrik eine Metrik, den sogenannten geodätischen Abstand, auf der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit induziert.

Sind $\xi, \eta \in T_pM$ gegeben, so lassen wir oft den Referenzpunkt weg und schreiben nur

$$\langle \xi, \eta\rangle_{\mathbf{g}} := \mathbf{g}(p)(\xi, \eta) \text{ und } |\xi|_{\mathbf{g}} := \mathbf{g}(p)(\xi, \xi)^{1/2}.$$

In der Basisdarstellung von ξ, η bezüglich den lokalen Koordinaten $x^1, \dots, x^n : U \to \mathbb{R}$ mit $p \in U$ gilt

$$\langle \xi, \eta\rangle_{\mathbf{g}} = g_{ij}(p)\xi^i\eta^j,$$

mit

$$g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\rangle_{\mathbf{g}}.$$

Anders ausgedrückt bedeutet dies

$$\mathbf{g} = g_{ij}dx^i \otimes dx^j,$$

wobei

$$dx^i \otimes dx^j(\xi, \eta) := dx^i(\xi)dx^j(\eta).$$

Ähnlich wie für Vektorfelder lässt sich leicht zeigen, dass die Glattheitsforderung an die riemannsche Metrik genau dann erfüllt ist, wenn für alle glatten lokalen Koordinaten (x^i) die zugehörigen Funktionen (g_{ij}) glatt sind.

Beispiel ($\mathbb{R}^n$)**.** Identifiziert man den Tangentialraum von $\mathbb{R}^n$ auf kanonische Weise (mittels der globalen Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$) mit $\mathbb{R}^n$, so induziert das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ eine riemannsche Metrik $\mathbf{g}_{\mathbb{R}^n}$. In den Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbf{g}_{\mathbb{R}^n}} = \delta_{ij} \xi^i \eta^j,$$

wobei $\delta_{ij} = 1$ falls $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ falls $i \neq j$.

Beispiel ($\mathbb{S}^n$ und andere Untermannigfaltigkeiten)**.** Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$. Damit ist $T_p\mathbb{S}^n$ ein Unterraum von $T_p\mathbb{R}^{n+1}$. Wir definieren $\mathbf{g}_{\mathbb{S}^n}$ als Einschränkung von $\mathbf{g}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ auf den Unterraum $T_p\mathbb{S}^n$. Das Paar $(\mathbb{S}^n, \mathbf{g}_{\mathbb{S}^n})$ ist eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Ähnlich lassen sich riemannsche Metriken von gegebenen Mannigfaltigkeiten auf glatte Untermannigfaltigkeiten einschränken.

Bemerkung. Mittels des Satzes über die Zerlegung der Eins (s.o.) lässt sich leicht zeigen, dass jede glatte kompakte Mannigfaltigkeit eine riemannsche Metrik besitzt (Übung). Tatsächlich besitzt jede glatte Mannigfaltigkeit eine riemannsche Metrik.

Ende 5. Vorlesung

Auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit $(M, \mathbf{g})$ kann genügend glatten Kurven eine Länge zugeordnet werden. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : I \to M$ stetig und stückweise glatt (es existieren endlich viele Punkte $t_1, \ldots, t_\ell \in I$, sodass $\gamma : I \setminus \{t_1, \ldots, t_\ell\} \to M$ glatt ist), so definieren wir die *Länge von* γ durch

$$L(\gamma) := \int_{\inf I}^{\sup I} |\dot\gamma(t)|_{\mathbf{g}} \, \mathrm{d}t.$$

Bei unbeschränktem oder nicht abgeschlossenem Parameterbereich I kann $L(\gamma)$ unendlich sein. Falls das Bild von γ im Kartengebiet einer Karte enthalten ist, gilt in den zugehörigen lokalen Koordinaten

$$L(\gamma) = \int_{\inf I}^{\sup I} \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))\dot\gamma(t)^i \dot\gamma(t)^j} \, \mathrm{d}t = \int_{\inf I}^{\sup I} \sqrt{g_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j} \, \mathrm{d}t.$$

Konvention: Ähnlich wie bei Karten betrachten wir von nun an nur noch stückweise glatte Kurven und verwenden die Begriffe “Kurve” und “stückweise glatte Kurve” synonym.

Wir sagen eine Kurve $\gamma : [a, b] \to M$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ verbindet die Punkte $x \in M$ und $y \in M$, falls $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Mittels der Länge von

Kurven definieren wir den *geodätischen Abstand* $\rho : M \times M \to [0, \infty]$ durch

$$\rho(x, y) := \rho_{\mathbf{g}}(x, y) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ verbindet } x \text{ und } y\}.$$

Wir verwenden hier die Konvention $\rho(x, y) = \infty$, falls x und y nicht durch eine Kurve verbunden sind, also das Infimum über eine leere Menge gebildet wird. Offensichtlich gilt

(a) $\rho(x, x) = 0$ für alle $x \in M$,

(b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ für alle $x, y \in M$,

(c) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ für alle $x, y, z \in M$.

Beispiel. Auf $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_{\mathbb{R}^n})$ gilt $\rho_{\mathbf{g}_{\mathbb{R}^n}}(x, y) = |x - y|$ (verwende Parametrisierung der Kurven nach Bogenlänge). Gleiches gilt für offene konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Sei $[a, b]$ ein Intervall (aufgefasst als Teilmenge $[a, b] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$) und $M := \mathbb{R}^2 \setminus [a, b] \subseteq \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der von $\mathbb{R}^2$ geerbten riemannschen Metrik $\mathbf{g}_M$. Es ist $\rho_{\mathbf{g}_M}(x, y)$ gegeben durch

$$\begin{cases} |x - y| & \text{falls } \overline{xy} \cap [a, b] = \emptyset, \\ \min\{|x - a| + |y - a|, |x - b| + |y - b|\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeichnung

Ob ρ den Wert unendlich annimmt oder nicht hängt nur vom topologischen Zusammenhang der Mannigfaltigkeit ab.

Proposition (Wegzusammenhang v.s. topologischer Zusammenhang)**.** *Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Die folgenden Aussagen sind Äquivalent.*

(i) *M ist topologisch zusammenhängend, das heißt $M = O_1 \cup O_2$ für zwei disjunkte offene Mengen $O_i \subseteq M$ impliziert $O_1 = \emptyset$ oder $O_2 = \emptyset$.*

(ii) *Für alle $x, y \in M$ existieren $a, b \in \mathbb{R}$ und eine stückweise glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to M$, die x und y verbindet.*

(iii) *Für alle $x, y \in M$ gilt $\rho(x, y) < \infty$.*

Beweis. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Das folgt aus der Definition von ρ durch geeignete Reparametrisierung.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei $x \in M$ gegeben. Man rechnet leicht nach, dass die Mengen

$$O_1 := \{y \in M \mid \text{es existiert eine Kurve, die } x, y \text{ verbindet}\}$$

und $O_2 := M \setminus O_1$ offen sind. Da $x \in O_1$ folgt $M = O_1$, da M topologisch zusammenhängend ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Angenommen es existieren nichtleere disjunkte offene Mengen $O_1, O_2 \subseteq M$, mit $M = O_1 \cup O_2$. Wir wählen $x \in O_1$, $y \in O_2$ und eine Kurve $\gamma : [a,b] \to M$, die x und y verbindet. Dann ist $\gamma^{-1}(O_1), \gamma^{-1}(O_2)$ eine disjunkte offene Überdeckung vom Intervall $[a,b]$. Da Intervalle topologisch zusammenhängend sind, folgt $\gamma^{-1}(O_1) = \emptyset$ oder $\gamma^{-1}(O_2) = \emptyset$, ein Widerspruch. □

Definition. Eine riemannsche Mannigfaltigkeit heißt *zusammenhängend*, wenn sei eine der äquivalenten Bedingungen des vorigen Lemmas erfüllt.

Bezeichnung. Ist d eine Metrik auf einer Menge X, so verwenden wir für $r > 0$ und $A \subseteq X$ die Bezeichnungen

$$U_r^d(x) = \{y \in X \mid d(A,y) < r\} \text{ und } B_r^d(x) = \{y \in X \mid d(A,y) \leq r\}.$$

Hier ist $d(A,y) = \inf\{d(z,y) \mid z \in A\}$.

Auf zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeiten ist der geodätische Abstand eine Metrik, die die Topologie der Mannigfaltigkeit induziert.

Theorem. *Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit. Der geodätische Abstand ρ ist eine Metrik, die die Topologie von M erzeugt.*

Lemma. *Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Für alle $p \in M$ existieren eine Karte (U, φ) mit $p \in U$ und $C > 0$, sodass*

$$C^{-1}|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \rho(x,y) \leq C|\varphi(x) - \varphi(y)|$$

für alle $x, y \in U$.

Beweis. Wir wählen eine Karte (V, φ), sodass $\varphi(V)$ eine Kugel mit Zentrum $\varphi(p)$ ist. Da $\mathbf{g}$ ein Skalarprodukt ist, ist die Matrix $(g_{ij}(p))$ für jedes $p \in V$ positiv definit. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $\overline{\varphi(V)} \to \mathbb{R}$, $p \mapsto g_{ij}(p)$ (hier muss V eventuell. noch etwas verkleinert werden) und der Kompaktheit von $\overline{\varphi(V)}$ sind die Matrizen $(g_{ij}(p))$ sogar gleichmäßig positiv definit. Es existiert demnach $C > 0$, sodass

$$C^{-2} \sum_i (\xi^i)^2 \leq g_{ij}(p) \xi^i \xi^j \leq C^2 \sum_i (\xi^i)^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $p \in V$. Diese Ungleichung bedeutet, dass auf $\varphi(V)$ die von $\mathbf{g}$ induzierte und die euklidische riemannsche Metrik äquivalent sind.

Ist $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \varphi(V), t \mapsto \varphi(x) + t(\varphi(y) - \varphi(x))$ die Gerade, die $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ verbindet, so erhalten wir mittels obiger Abschätzung

$$\rho(x,y) \leq L(\varphi^{-1} \circ \tilde{\gamma}) \leq C|\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Für die untere Abschätzung müssen wir V noch etwas verkleinern. Zeichnung. Es sei r der Radius der Kugel $\varphi(V)$ um $\varphi(p)$. Wir definieren $U := \varphi^{-1}(U_{r/3}(\varphi(p)))$. Es sei $\gamma : [a,b] \to M$ eine Kurve, die $x, y \in U$ verbindet. Verlässt die Kurve $\gamma \circ \varphi$ die Kugel $\overline{\varphi(V)}$ nicht, so gilt

$$L(\gamma) \geq C^{-1}|\varphi(x) - \varphi(y)|,$$

da Geraden auf Kugeln den geodätischen Abstand bezüglich der euklidischen Metrik minimieren (siehe Beispiel oben). Verlässt $\gamma \circ \varphi$ die Kugel $\overline{\varphi(V)}$, so bezeichnen wir mit ζ den ersten Punkt auf dem Rand $\partial(\varphi(V))$, den $\gamma \circ \varphi$ trifft und mit η die Einschränkung von γ bis zum Punkt $\gamma(\varphi^{-1}(\zeta))$. Dann liegt $\eta \circ \varphi$ komplett in $\overline{\varphi(V)}$ und wir erhalten aufgrund der Wahl von U und ζ

$$L(\gamma) \geq L(\eta) \geq C^{-1}|\varphi(x) - \zeta| \geq C^{-1}\frac{2}{3}r \geq |\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Zeichnung. Das beendet den Beweis. □

Beweis. (Theorem über den geodätischen Abstand). Seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Zunächst müssen wir $\rho(x,y) > 0$ zeigen . Wir wählen eine Karte (U, φ) wie im vorigen Lemma mit $x \in U$. Ist $y \in U$, so folgt die Aussage sofort aus dem Lemma. Ist $y \notin U$, so wählen wir eine euklidische Kugel $B_r(\varphi(x)) \subseteq \varphi(U)$ um $\varphi(x)$. Jede Kurve γ, die x und y verbindet, muss den Rand $\partial(\varphi^{-1}(B_r(\varphi(x))) = \varphi^{-1}(\partial B_r(\varphi(x)))$ in einem Punkt z treffen. Es folgt $L(\gamma) \geq \rho(x,z) \geq C^{-1}|\varphi(x) - \varphi(z)| = C^{-1}r$ und somit $\rho(x,y) \geq C^{-1}r > 0$.

Um die Äquivalenz der Topologien zu beweisen muss man zeigen, dass jede offene Teilmenge von M eine ρ-Kugel enthält und umgekehrt jede ρ-Kugel eine offene Menge von M enthält. Dies folgt leicht aus dem vorigen Lemma (Übung). □

Lemma. *Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Für alle $r, \delta > 0$ und $x \in M$ gilt*

$$U^\rho_\delta(B^\rho_r(x)) = U^\rho_{r+\delta}(x).$$

Beweis. Die Inklusion $U^\rho_\delta(B^\rho_r(x)) \subseteq U^\rho_{r+\delta}(x)$ folgt leicht aus der Dreiecksungleichung für ρ.

Sei nun $z \in M$ mit $r < \rho(x,z) < r + \delta$ gegeben. Es sei

$$\varepsilon := r + \delta - \rho(x,z) > 0.$$

Wir wählen eine Kurve γ, die x und z verbindet und

$$\rho(x,z) > L(\gamma) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Zeichnung. erfüllt. Sei γ_1 der Anfangsteil von γ, mit $L(\gamma_1) = r$ (dieser existiert nach dem Zwischenwertsatz) und sei ζ der Endpunkt von γ_1. Mit γ_2 bezeichnen wir den Rest der Kurve γ. Es gilt $\zeta \in B_r(x)$ und

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) = r + L(\gamma_2) \geq r + \rho(z, \zeta).$$

Wäre $z \in M \setminus U^\rho_\delta(B^\rho_r(x))$, so würde $\rho(z, \zeta) \geq \delta$ gelten und damit

$$r + \delta = \rho(x, z) + \varepsilon > L(\gamma) + \frac{\varepsilon}{2} \geq r + \rho(z, \zeta) + \frac{\varepsilon}{2} \geq r + \delta + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dies ist ein Widerspruch. □

Die Vollständigkeit vom metrischen Raum (M, ρ) kann mithilfe von topologischen Eigenschaften charakterisiert werden.

Proposition (Topologische Eigenschaften v.s. Vollständigkeit)**.** *Es sei* $(M, \mathbf{g})$ *eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) (M, ρ) *ist vollständig.*

(ii) *Alle abgeschlossenen* ρ*-Kugeln sind kompakt.*

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Jede ρ-Cauchy-Folge ist in einer abgeschlossenen Kugel enthalten und hat demnach eine konvergente Teilfolge. Cauchy-Folgen mit konvergenten Teilfolgen konvergieren.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei $x \in M$ und $I := \{r \geq 0 \mid B^\rho_r(x) \text{ ist kompakt}\}$. Offensichtlich ist I ein Intervall, welches 0 enthält. Wir beweisen, dass I offen und abgeschlossen ist, also $I = [0, \infty)$ gilt.

I ist offen: Da ρ die Topologie von M erzeugt, sind kleine abgeschlossene ρ-Kugeln kompakt. Sei $r \in I$. Für jedes $y \in B^\rho_r(x)$ existiert demnach $\varepsilon_y > 0$, sodass $B^\rho_{\varepsilon_y}(y)$ kompakt ist. Da $B^\rho_r(x)$ kompakt ist, wird es von endlich vielen zugehörigen offenen Kugeln $U^\rho_{\varepsilon_{y_1}}(y_1), \ldots, U^\rho_{\varepsilon_{y_k}}(y_k)$ überdeckt. Sei nun

$$A := \bigcup_{i=1}^k B^\rho_{\varepsilon_{y_i}}(y_i)$$

und

$$2\delta := \inf\{\rho(w, M \setminus A) \mid w \in B_r(x)\}.$$

Da A kompakt und $w \mapsto \rho(w, M \setminus A)$ stetig ist, gilt $\delta > 0$. Mithilfe des vorigen Lemmas erhalten wir

$$B^\rho_{r+\delta}(x) \subseteq U^\rho_{r+2\delta}(x) = U^\rho_{2\delta}(B_r(x)) \subseteq A.$$

Es folgt $r + \delta \in I$ und damit die Offenheit von I.

I ist abgeschlossen: Sei $r > 0$ mit $[0, r) \subseteq I$. Wir zeigen $[0, r] \subseteq I$. Sei (x_n) eine Folge in $B^\rho_r(x)$. Da die Metrik ρ das Infimum über Pfadlängen ist, existiert zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $x^m_n \in B_{r-\frac{2}{m}}(x)$ mit $\rho(x_n, x^m_n) \leq \frac{1}{m}$. Da die Kugeln $B_{r-\frac{2}{m}}(x)$ nach Voraussetzung kompakt sind, können wir mithilfe eines geeigneten Diagonalfolgenarguments Indizes n_k finden, sodass für jedes m die Folge $(x^m_{n_k})_k$ konvergiert. Dann ist (x_{n_k}) eine Cauchy-Folge, da

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \rho(x_{n_k}, x^m_{n_k}) + \rho(x^m_{n_k}, x^m_{n_l}) + \rho(x^m_{n_l}, x_{n_l}) \leq \frac{2}{m} + \rho(x^m_{n_k}, x^m_{n_l}).$$

Wegen der Vollständigkeit von (M, ρ) ist (x_{n_k}) konvergent. Demnach ist $B^\rho_r(x)$ kompakt. □

Bemerkung. Die Charakterisierung von Vollständigkeit über die Kompaktheit der Bälle gilt allgemein in lokal kompakten metrischen Räumen, deren Metrik durch die Länge von Kurven induziert ist. Diese Aussage ist auch als Satz von Hopf-Rinow bekannt.

Ende 6. Vorlesung

Lemma (Separabilität von (M, ρ))**.** *Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine zusammenhängend riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist (M, ρ) ein separabler metrischer Raum.*

Beweis. Da M das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, existiert eine abzählbare Familie offener Mengen (O_n), die die Topologie von M erzeugt. Zu jedem n wählen wir nun offene ρ-Kugeln U_n, mit $U_n \subseteq O_n$. Deren Mittelpunkte sind eine abzählbare dichte Teilmenge von M. □

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M, \mathbf{g})$ gibt es einen durch die Metrik induzierten Isomorphismus

$$^\flat : T_pM \to T_pM^*,\ \xi^\flat(\eta) := \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbf{g}}.$$

In lokalen Koordinaten (x^i) gilt

$$\xi^\flat = \xi^\flat_i dx^i_p = \xi^\flat\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big) dx^i_p = \langle \xi, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \rangle_{\mathbf{g}}\, dx^i_p = g_{ij}(p)\xi^j dx^i_p$$

und somit

$$\xi^\flat_i = g_{ij}(p)\xi^j.$$

Bezüglich der Basen $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\}$ und $\{dx^i_p\}$ wird die lineare Abbildung $^\flat$ also von der Matrix $(g_{ij}(p))^n_{i,j=1}$ dargestellt. Oft lässt man $^\flat$ weg und schreibt nur (ξ_i) statt $(\xi^\flat_i)$ für die Komponenten von $\xi^\flat$. In diesem Sinne operiert $^\flat$ indem es mittels der Metrik Indizes nach unten verschiebt. Die Umkehrabbildung zu $^\flat$ wird mit $^\sharp : T_pM^* \to T_pM$ bezeichnet. In den gegebenen lokalen Koordinaten gilt für $\omega \in T_pM^*$

$$(\omega^\sharp)^i = g^{ij}(p)\omega_j,$$

wobei $(g^{ij}(p))$ die Einträge der zu $(g_{ij}(p))$ inversen Matrix sind. Auch in diesem Fall schreibt man oft nur (ω^i) statt $(\omega^\sharp)^i$ für die Komponenten von $\omega^\sharp$, sodass $^\sharp$ Indizes anhebt. Die Bezeichnungen $^\flat$ und $^\sharp$ stammen aus der Musiktheorie und die Isomorphismen werden auch *musikalische Isomorphismen* genannt. Die für uns wichtigste Anwendung der musikalischen Isomorphismen ist die folgende Definition.

Definition (Gradient)**.** Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M)$. Das glatte Vektorfeld

$$\nabla_{\mathbf{g}} f := (df)^\sharp$$

heißt *Gradient von f*.

In lokalen Koordinaten (x^i) gilt

$$(\nabla_{\mathbf{g}} f)^i = g^{ij}(df)_j = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j},$$

und somit

$$\nabla_{\mathbf{g}} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Bemerkung (Geometrische Deutung Gradient)**.**

- Die Anwendung von $\xi \in T_pM$ auf eine glatte Funktion f kann als Änderung der Funktion f im Punkt p in Richtung ξ aufgefasst werden. Der Gradient einer Funktion zeigt in Richtung der stärksten Änderung, d.h. für alle $\xi \in T_pM$ mit $|\xi|_{\mathbf{g}} = 1$ gilt

$$\xi(f) \leq \frac{1}{|\nabla_{\mathbf{g}} f|_{\mathbf{g}}} \nabla_{\mathbf{g}} f(f).$$

  Damit man die Richtung der stärksten Änderung überhaupt definieren kann, benötigt man auch den Begriff der Länge eines Tangentialvektors. Sonst kann man unterschiedliche Richtungen nicht vergleichen.

- Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine glatte riemannsche n - Mannigfaltigkeit. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $df_p \neq 0$ für alle $p \in M$ und $C \in \mathrm{Bild}(f)$, so ist

$$S := \{x \in M \mid f(x) = C\}$$

  eine $(n-1)$ - dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit (verwende eine geeignete Version des Satzes über implizite Funktionen). In jedem Punkt $p \in S$ steht $\nabla_{\mathbf{g}} f$ senkrecht auf T_pS, d.h. für alle $\xi \in T_pS$ gilt

$$\langle \xi, \nabla_{\mathbf{g}} f \rangle_{\mathbf{g}} = 0.$$

  In diesem Sinne steht der Gradient einer Funktion senkrecht auf ihren Konstanzflächen.

6. Das riemannsche Volumen

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff des Volumens von Teilmengen einer riemannschen Mannigfaltigkeit ein. Wir werden es mithilfe des Lebesgue-Maßes auf Kartengebieten definieren. Dazu wiederholen wir zunächst etwas Maßtheorie und eine Transformationsformel für die Matrixdarstellung der riemannschen Metrik.

Es sei X eine nichtleere Menge. Ein System $\mathfrak{R}$ von Teilmengen von X heißt *Halbring über* X, falls es die folgenden drei Eigenschaften erfüllt.

- $\emptyset \in \mathfrak{R}$,
- $A, B \in \mathfrak{R}$ impliziert $A \cap B \in \mathfrak{R}$,
- für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ existieren $C_1, \ldots, C_n \in \mathfrak{R}$, mit
$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i.$$

Ist $\mathfrak{R}$ ein Halbring, so heißt eine Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ *Prämaß*, falls

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- μ ist σ-additiv.

Ein Prämaß μ auf $\mathfrak{R}$ heißt *σ-endlich*, falls es eine Folge (E_n) in $\mathfrak{R}$ gibt, mit $\mu(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_n E_n$. Es gilt der folgende Fortsetzungssatz, siehe [**1**, Korollar 5.7].

Theorem (Fortsetzungssatz für Prämaße)**.** *Jedes σ-endliche Prämaß auf einem Halbring $\mathfrak{R}$ lässt sich eindeutig zu einem Maß auf die von $\mathfrak{R}$ erzeugte σ-Algebra fortsetzen.*

Bemerkung. Die Fortsetzbarkeit von μ folgt aus dem Satz von Caratheodory, [**1**, Satz 4.4], und die Eindeutigkeit der Fortsetzung ist eine Folgerung aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße, [**1**, Satz 5.6].

Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine riemannsche n-Mannigfaltigkeit und (U, φ) bzw. (V, ψ) Karten mit lokalen Koordinatenfunktionen (x^i) bzw. (y^j). Die Ableitung des Koordinatenwechsels $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ im Punkt $\varphi(p)$ bezeichnen wir mit $J(p) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Für die Matrixdarstellung von J in Standardkoordinaten (Jacobimatrix) gilt

$$\begin{aligned} J_i^k(p) :&= \partial_i \left[\psi \circ \varphi^{-1}\right]^k (\varphi(p)) \\ &= \partial_i \left[y^k \circ \varphi^{-1}\right] (\varphi(p)) \\ &= \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(p). \end{aligned}$$

Dabei ist k der Zeilenindex und i der Spaltenindex der Matrix (J_i^k). Im folgenden Lemma bezeichnet g^φ die Matrixdarstellung von $\mathbf{g}$ bezüglich (U, φ) und g^ψ die Matrixdarstellung von $\mathbf{g}$ bezüglich (V, ψ).

Lemma (Transformationsformel riemannsche Metrik)**.** *Auf $U \cap V$ gilt*

$$g^\varphi = J^T g^\psi J.$$

Hier bezeichnet J^T die zu J transponierte Matrix.

Beweis. Wir kennen bereits die Basistransformation

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} = J_i^k \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Die Definition von g^φ und g^ψ liefert nun

$$g_{ij}^\varphi = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle_{\mathbf{g}} = J_i^k J_j^l \langle \frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l} \rangle_{\mathbf{g}} = J_i^k g_{kl}^\psi J_j^l = (J^T g^\psi J)_{ij}.$$

Das beendet den Beweis. □

Theorem (Existenz und Eindeutigkeit riemannsches Volumen)**.** *Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Auf der Borel-σ-Algebra von M existiert ein eindeutiges Maß* $\mathrm{vol}_{\mathbf{g}}$*, sodass für alle glatten Karten (U, φ) und alle Borel-messbaren $A \subseteq U$ gilt*

$$\mathrm{vol}_{\mathbf{g}}(A) = \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij} \circ \varphi^{-1})} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Hier ist (g_{ij}) die Matrixdarstellung von $\mathbf{g}$ bezüglich (U, φ) und λ das Lebesgue-Maß auf $\varphi(U)$. Für alle kompakten $K \subseteq M$ gilt $\mathrm{vol}_{\mathbf{g}}(K) < \infty$.

Ende 7. Vorlesung

Beweis. Es sei $\mathcal{D}$ die differenzierbare Struktur von M, $\mathcal{B}$ die Borel-σ-algebra auf M und

$$\mathcal{E} := \{A \in \mathcal{B} \mid \text{es existiert } (U, \varphi) \in \mathcal{D}, \text{ sodass } A \subseteq U\}.$$

Die Familie $\mathcal{E}$ ist ein Halbring, der $\mathcal{B}$ erzeugt. Für $A \in \mathcal{E}$ und $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ mit $A \subseteq U$ definieren wir

$$\mu(A) := \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^\varphi \circ \varphi^{-1})} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Nach dem Satz über die Fortsetzung von Prämaßen genügt es zu beweisen, dass μ ein σ-endliches Prämaß ist.

Wir zeigen zunächst, dass μ wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der Karte ist. Seien (U, φ) und (V, ψ) Karten und $A \subseteq U \cap V$ eine Borel-Menge. Wir setzen $\Phi := \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$. Mit der Notation aus dem vorigen Lemma gilt $D\Phi(\varphi(p)) = J(p)$ und

$$\det(g_{ij}^\varphi(p)) = |\det J(p)|^2 \det(g_{ij}^\psi(p)).$$

Der Transformationssatz für das Lebesgue-Maß liefert

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi} \circ \psi^{-1})}\, \mathrm{d}\lambda &= \int_{\Phi(\varphi(A))} \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi} \circ \psi^{-1})}\, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \Phi)}\, |\det D\Phi|\, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi} \circ \varphi^{-1})}\, |\det D\Phi|\, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi} \circ \varphi^{-1})}\, |J \circ \varphi^{-1}|\, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^{\varphi} \circ \varphi^{-1})}\, \mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Unabhängigkeit der Definition von μ von der Wahl der Karte.

Die σ-Additivität von μ folgt aus den Eigenschaften des Integrals bezüglich λ. Für kompaktes $K \subseteq M$ existieren endlich viele Karten (U_l, φ_l), $l = 1, \ldots, n$, deren Kartengebiete K überdecken und für die $\varphi_l(U_l)$ beschränkt ist. Da das Lebesgue-Maß auf beschränkten Gebieten endlich und die Abbildungen

$$\varphi_l(U_l) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{\det(g_{ij}^{\varphi_l} \circ \varphi_l^{-1}(x))}$$

stetig sind, folgt $\mathrm{vol}_{\mathbf{g}}(K) < \infty$. Die σ-Endlichkeit von μ folgt aus der Separabilität von (M, ρ) und der Kompaktheit kleiner Kugeln. $\square$

Bemerkung. Die Idee, ein Borel-Maß auf einer Mannigfaltigkeit durch eine geeignete Wahl von Dichten bezüglich des Lebesgue-Maßes in den Kartendarstellungen zu definieren, ist natürlich. Man muss nur sicherstellen, dass die Dichten kompatibel mit Kartenwechseln sind. Unserer Wahl liegt folgende Beobachtung zugrunde. Ist $(S, \mathbf{g}_S)$ eine glatte Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}_{\mathbb{R}^n})$ mit induzierter riemannscher Metrik, so ist $\mathrm{vol}_{\mathbf{g}_S}$ das aus den Analysisvorlesungen bekannte Oberflächenmaß auf S (Übung). Dessen Definition wiederum lässt sich heuristisch aus dem Transformationsverhalten des Volumens von Würfeln unter linearen Transformationen und einem Approximationsargument herleiten.

7. Transformationen riemannscher Metriken

In diesem Abschnitt diskutieren wir kurz den Isomoprhismusbegriff für riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Definition (Ableitung)**.** Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ glatt. Die *Ableitung von F im Punkt $p \in M$* ist die lineare

Abbildung

$$DF(p) : T_pM \to T_{F(p)}N,\ \xi \mapsto [f \mapsto \xi(f \circ F)].$$

Statt $DF(p)$ schreibt man auch kurz $F_*(p)$ und nennt die induzierte Abbildung $F_* : TM \to TN$ *Pushforward.*

Bemerkung.

- Das oben schon eingeführte Differential ist die Ableitung einer reellwertigen Funktion.
- Um Ableitungen von Funktionen auf Mannigfaltigkeit zu definieren, muss man nicht nur die Funktion sondern auch den Raum linearisieren.
- Identifiziert man die Tangentialräume des $\mathbb{R}^n$ über die globale Karte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ mit $\mathbb{R}^n$, so liefert der oben eingeführte Begriff der Ableitung den üblichen Begriff der Fréchet-Ableitung (Übung).
- Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathrm{id}_M : M \to M$ die Identitätsabbildung, so gilt $D\mathrm{id}_M(p) = \mathrm{id}_{T_pM}$.

Lemma (Kettenregel)**.** *Es seien M, N, L glatte Mannigfaltigkeiten und $F : N \to M$ und $G : M \to L$ glatte Funktionen. Es ist $G \circ F$ glatt und für alle $p \in M$ gilt*

$$D(G \circ F)(p) = D(G)(F(p)) \circ D(F)(p).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus den Definitionen. □

Definition (Pullbackmetrik)**.** Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $(N, \mathbf{g})$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $F : M \to N$ glatt. Die Familie von Bilinearformen $F^*\mathbf{g} = (F^*\mathbf{g}(p))_{p \in M}$, welche durch

$$F^*\mathbf{g}(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},\ (\xi, \eta) \mapsto \mathbf{g}(F(p))(F_*(p)\xi, F_*(p)\eta)$$

gegeben ist, heißt *Pullback von* $\mathbf{g}$.

Bemerkung.

- Im Allgemeinen ist der Pullback einer riemannschen Metrik keine riemannsche Metrik, die Bilinearformen können ausgeartet sein. Tatsächlich ist $F^*\mathbf{g}$ genau dann eine riemannsche Metrik, wenn $F_*(p)$ in jedem Punkt $p \in M$ injektiv ist. In diesem Fall heißt F Immersion. Aufgrund der Kettenregel sind alle Diffeomorphismen Immersionen, ihre Ableitungen sind Vektorraumisomorphismen (Übung).
- Ist S eine glatte Untermannigfaltigkeit von $(M, \mathbf{g})$, so ist die Inklusionsabbildung $\iota : S \to M, x \mapsto x$ eine glatte Immersion. Die Einschränkung von $\mathbf{g}$ auf TS ist gegeben durch $\iota^*\mathbf{g}$ (Übung).

- Für den Pullback der Metrik gilt dann

$$F^*\mathbf{g} = \mathbf{g}(F_*\cdot, F_*\cdot).$$

  In diesem Sinn sind Pullback und Pushforward duale Operationen.

- Man kann natürlich auch beliebige Bilinearformen auf TN mit dem Pullback zurückziehen.

Definition (Riemannsche Isometrie)**.** Es seien $(M, \mathbf{g}_M)$ und $(N, \mathbf{g}_N)$ riemannsche Mannigfaltigkeiten. Ein Diffeomorphismus $F : M \to N$ heißt *riemannsche Isometrie*, falls $F^*\mathbf{g}_N = \mathbf{g}_M$.

Bemerkung. Jede riemannsche Isometrie $F : M \to N$ ist auch eine Isometrie der Metrischen Räume $(M, \rho_{\mathbf{g}_M})$ und $(N, \rho_{\mathbf{g}_N})$ (Übung), d.h. es gilt

$$\rho_{\mathbf{g}_M}(x, y) = \rho_{\mathbf{g}_N}(F(x), F(y)).$$

Tatsächlich gilt auch die Umkehrung dieser Aussage und ist bekannt als Satz von Steenrod-Myers. Jede metrische Isometrie $F : (M, \rho_{\mathbf{g}_M}) \to (N, \rho_{\mathbf{g}_N})$ ist automatisch eine riemannsche Isometrie. Dies ist besonders bemerkenswert, da an metrische Isometrien zunächst keine Glattheitsanforderungen gestellt werden.

8. Beispiele - Modellmannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt behandeln wir Beispielklassen von Mannigfaltigkeiten, für die man alle eingeführten Größen recht explizit berechnen kann.

Seien $(X, \mathcal{D}_X)$ und $(Y, \mathcal{D}_Y)$ glatte Mannigfaltigkeiten. Wir statten das Produkt $M := X \times Y$ mit der Produkttopologie und der von

$$\{((\varphi, \psi), U \times V) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{D}_X \text{ und } (V, \psi) \in \mathcal{D}_Y\}$$

erzeugten glatten Struktur $\mathcal{D}_M$ aus. Die glatte Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{D}_M)$ heißt *kartesisches Produkt* von $(X, \mathcal{D}_X)$ und $(Y, \mathcal{D}_Y)$. Ist $y \in Y$ gegeben, so erzeugt jede Derivation $\xi \in T_xX$ eine Derivation $\xi_X \in T_{(x,y)}M$ durch

$$\xi_X(f) := \xi(f(\cdot, y)).$$

Die Abbildung $T_xX \to T_{(x,y)}M$, $\xi \mapsto \xi_X$ ist linear und injektiv. In diesem Sinne kann T_xX als Unterraum von $T_{(x,y)}M$ aufgefasst werden. Analoges gilt natürlich auch für T_yY. Der Tangentialraum an das Produkt ist die direkte Summe dieser beiden Unterräume

$$T_{(x,y)}M = T_xX \oplus T_yY.$$

Zu jedem Vektor $\xi \in T_{(x,y)}M$ existieren also eindeutige $\xi_X \in T_xX$ und $\xi_Y \in T_yY$ mit $\xi = \xi_X + \xi_Y$. Ist $\mathbf{g}_X$ eine riemannsche Metrik auf X und $\mathbf{g}_Y$ eine riemannsche Metrik auf Y, so definieren wir für $\xi, \eta \in T_{(x,y)}M$

$$(\mathbf{g}_X \oplus \mathbf{g}_Y)((x,y))(\xi,\eta) := \mathbf{g}_X(x)(\xi_X,\eta_X) + \mathbf{g}_Y(y)(\xi_Y,\eta_Y).$$

Die riemannsche Mannigfaltigkeit $(M, \mathbf{g}_X \oplus \mathbf{g}_Y)$ heißt *riemannsches Produkt* von $(X, \mathbf{g}_X)$ und $(Y, \mathbf{g}_Y)$.

Ist $\psi : X \to (0,\infty)$ eine glatte Funktion, so kann man auch die riemannsche Metrik

$$(\mathbf{g}_X \oplus_\psi \mathbf{g}_Y)((x,y))(\xi,\eta) := \mathbf{g}_X(x)(\xi_X,\eta_X) + \psi^2(x)\mathbf{g}_Y(y)(\xi_Y,\eta_Y)$$

betrachten. In diesem Fall heißt $(M, \mathbf{g}_X \oplus_\psi \mathbf{g}_Y)$ *verzerrtes Produkt (Warpprodukt)* von $(X, \mathbf{g}_X)$ und $(Y, \mathbf{g}_Y)$. Ist klar welche Metriken betrachtet werden, so schreibt man auch kurz $X \otimes Y$ für das riemannsche Produkt und $X \otimes_\psi Y$ für das Warpprodukt von $(X, \mathbf{g}_X)$ und $(Y, \mathbf{g}_Y)$.

Bemerkung. Der Exponent zwei bei ψ^2 wird beim Warpprodukt aus Skalierungsgründen gewählt.

Viele bekannte Beispiele sind Warpprodukte (oder lokal Warpprodukte). Dies diskutieren wir nun anhand von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{S}^n$.

Proposition (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$)**.** *Die Abbildung*

$$\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1},\ x \mapsto (r(x), \theta(x)),$$

mit $r(x) = |x|$ *und* $\theta(x) = |x|^{-1}x$ *ist eine riemannsche Isometrie der Mannigfaltigkeiten* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *und* $(0,\infty) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1}$*, wobei* $\psi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\psi(r) = r$.

Ende 8. Vorlesung

Beweis. Offensichtlich ist Φ ein Diffeomorphismus. Es seien (x^i) die Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^n$ und

$$\pi^i : (0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}, \pi^i((\bar{x}^0, \dots, \bar{x}^n)) := \bar{x}^i.$$

Wir setzen $r := \pi^0 \circ \Phi$ und $f^i := \pi^i \circ \Phi$, und erhalten

$$x^i = rf^i \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Die Produktregel für das Differential liefert

$$dx^i = f^i dr + r df^i.$$

Quadrieren dieser Gleichung (bezüglich des Tensorproduktes für Kovektoren) impliziert

$$(dx^i)^2 = (f^i)^2(dr)^2 + (rdr)(f^i df^i) + (f^i df^i)(rdr) + r^2(df^i)^2.$$

Differenzieren der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n (f^i)^2 = 1$$

zeigt
$$\sum_{i=1}^{n} f^i df^i = 0.$$
Unter Verwendung dieser Identitäten und der Gleichung für $(dx^i)^2$ erhalten wir
$$\mathbf{g}_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 = (dr)^2 + r^2 \sum_{i=1}^{n} (df^i)^2.$$
Für $\xi \in T_x\mathbb{R}^n$ gilt
$$dr(\xi) = \xi(r) = \xi(\pi^0 \circ \Phi) = d\pi^0(\Phi_* \xi)$$
und damit $(dr)^2 = \Phi^*(d\pi^0)^2$. Ferner gilt
$$df^i(\xi) = \xi(f^i) = \xi(\pi^i \circ \Phi) = d\pi^i(\Phi_* \xi)$$
und deshalb $(df^i)^2 = \Phi^*(d\pi^i)^2$. Aus diesen beiden Rechnungen und den Identitäten oben erhalten wir
$$\mathbf{g}_{\mathbb{R}^n} = \Phi^* \underbrace{\left((d\pi^0)^2 + (\pi^0)^2 \sum_{i=1}^{n} (d\pi^i)^2 \right)}_{=:\mathbf{g}}.$$
Wir müssen noch zeigen, dass $\mathbf{g}$ das entsprechende Warpprodukt ist. Sei dazu $\xi \in T_{(\rho,\vartheta)}(0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ gegeben. Wir zerlegen es eindeutig als $\xi = \xi_\rho + \xi_\vartheta$ mit $\xi_\rho \in T_\rho(0,\infty)$ und $\xi_\vartheta \in T_\vartheta \mathbb{S}^{n-1}$. Nach der Diskussion am Anfang des Kapitels gilt
$$\xi_\vartheta(f) = \xi(f(\rho,\cdot)) \text{ und } \xi_\rho(f) = \xi(f(\cdot,\vartheta)).$$
Es folgt
$$d\pi^0(\xi_\vartheta) = \xi_\vartheta(\pi_0) = \xi(\pi_0(\rho,\cdot)) = \xi(\rho) = 0$$
und analog
$$d\pi^i(\xi_\rho) = 0 \text{ für } i = 1,\dots,n.$$
Die Unterräume $T_\rho(0,\infty)$ und $T_\vartheta\mathbb{S}^{n-1}$ sind also orthogonal bezüglich $\mathbf{g}$. Dementsprechend ist die Metrik $\mathbf{g}$ das Warpprodukt der Einschränkung von $(d\pi^0)^2$ auf $T(0,\infty)$ und der Einschränkung von $\sum_{i=1}^{n}(d\pi^i)^2$ auf $T\mathbb{S}^{n-1}$ bezüglich der Funktion $\psi = \pi^0|_{(0,\infty)}$.

Schränkt man die Funktion π^0 auf $(0,\infty)$ ein, so erhält man die Identitätsabbildung. Demnach entspricht der Summand $(d\pi^0)^2$ der Standardmetrik auf $(0,\infty)$. Schränkt man die Funktionen π^i, $i = 1,\dots,n$, auf $\mathbb{S}^{n-1}$ ein, so sind sie die Einschränkungen der Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^n$. Also entspricht $\sum_{i=1}^{n}(d\pi^i)^2$ der Einschränkung der Metrik $\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2$ auf $T\mathbb{S}^n$. Dies ist aber genau die Standardmetrik der Sphäre. $\square$

Bemerkung.
- In der Literatur schreibt man für das obige Resultat verkürzt

$$\mathbf{g}_{\mathbb{R}^n} = (dr)^2 + r^2 \mathbf{g}_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

- Die gleiche Rechnung funktioniert natürlich auch mit offenen Kugeln statt $\mathbb{R}^n$.

Polarkoordinaten können auch auf der Sphäre eingeführt werden. Sei dazu $n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ der Nordpol und $s = -n \in \mathbb{S}^n$ der Südpol der Sphäre. Für $x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{n, s\}$ definieren wir zwei Werte $r(x) \in (0, \pi)$ und $\theta(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$ durch

$$\cos r(x) = x^{n+1} \text{ und } \theta(x) = |x'|^{-1} x',$$

wobei $x' = (x^1, \dots, x^n)$. Die folgende Proposition lässt sich ähnlich wie oben beweisen (Übung).

Zeichnung

Proposition (Polarkoordinaten für $\mathbb{S}^n$)**.** *Die Abbildung*

$$\mathbb{S}^n \setminus \{n, s\} \to (0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-1},\ x \mapsto (r(x), \theta(x))$$

ist eine riemannsche Isometrie der riemannschen Mannigfaltigkeiten $\mathbb{S}^n \setminus \{n, s\}$ *und* $(0, \pi) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1}$*, mit* $\psi : (0, \pi) \to \mathbb{R}, \psi(r) = \sin r$*.*

Bemerkung. Das Resultat schreibt man verkürzt

$$\mathbf{g}_{\mathbb{S}^n} = (dr)^2 + \sin^2 r\, \mathbf{g}_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Definition (Modellmannigfaltigkeiten)**.** Wir nennen eine riemannsche n-Mannigfaltigkeit $(M, \mathbf{g})$ *riemannsches Modell*, falls es ein $R \in (0, \infty]$, eine globale Karte $\varphi : M \to U_R$ und eine glatte Abbildung $\psi : (0, R) \to (0, \infty)$ gibt, sodass die Abbildung

$$\Phi : M \setminus \{o\} \to (0, R) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1},\ x \mapsto (r(x), \theta(x))$$

eine riemannsche Isometrie ist, wobei $o := \varphi^{-1}(0)$,

$$r : M \to [0, \infty),\ x \mapsto |\varphi(x)|$$

und

$$\theta : M \setminus \{o\} \to \mathbb{S}^{n-1},\ x \mapsto r(x)^{-1} \varphi(x).$$

Bemerkung.
- Der $\mathbb{R}^n$ ist ein Modell vom Radius $R = \infty$ und $\mathbb{S}^n \setminus \{s\}$ ist ein Modell vom Radius π.
- Für jede glatte Funktion $\psi : (0, R) \to (0, \infty)$ ist $(0, R) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1}$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $\mathbf{g}_\psi$ ihre Metrik und

  $$\Phi : U_R \setminus \{0\} \to (0, R) \times \mathbb{S}^{n-1}, x \mapsto (|x|, |x|^{-1} x)$$

  der übliche Diffeomorphismus. Der Pullback $\Phi^* \mathbf{g}_\psi$ ist eine riemannsche Metrik auf $U_R \setminus \{0\}$. Ob er sich zu einer riemannschen Metrik $\widetilde{\mathbf{g}_\psi}$ auf U_R fortsetzen lässt, und damit $(U_R, \widetilde{\mathbf{g}_\psi})$ ein riemannsches Modell vom Radius R wird, hängt von Eigenschaften von ψ in 0 ab. Es lässt sich $\Phi^* \mathbf{g}_\psi$ genau dann glatt in den Punkt 0 fortsetzen, wenn $\psi(0+) = 0$ und $\psi'(0+) = 1$ gilt.

Auf Modellmannigfaltigkeiten (und allgemeiner auf Warpprodukten) kann man den geodätischen Abstand und das riemannsche Volumen recht einfach ausrechnen.

Proposition. *Seien $(X, \mathbf{g}_X)$ und $(Y, \mathbf{g}_Y)$ riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\psi : X \to (0, \infty)$ glatt. Ist Y m-dimensional, so erfüllt das riemannsche Volumen vom Warpprodukt $(M, \mathbf{g}_X \oplus_\psi \mathbf{g}_Y)$ die Gleichung*

$$\mathrm{vol}_{\mathbf{g}_X \oplus_\psi \mathbf{g}_Y} = (\psi^m \otimes 1) \cdot \mathrm{vol}_{\mathbf{g}_X} \otimes \mathrm{vol}_{\mathbf{g}_Y}.$$

Hier ist $(\psi^m \otimes 1) : X \times Y \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \psi^m(x)$ und $\mathrm{vol}_{\mathbf{g}_X} \otimes \mathrm{vol}_{\mathbf{g}_Y}$ das Produktmaß von $\mathrm{vol}_{\mathbf{g}_X}$ und $\mathrm{vol}_{\mathbf{g}_Y}$.

Beweis. Die Formel lässt sich leicht über die Koordinatendarstellung nachrechnen (Übung). □

Ist M ein riemannsches Modell und

$$\Phi : M \setminus \{o\} \to (0, R) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1}$$

die zugehörige Isometrie, so definieren wir Funktionen $r : M \to [0, \infty)$ und $\theta : M \setminus \{o\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ durch $r(o) = 0$ und die Gleichung

$$\Phi(x) = (r(x), \theta(x)) \text{ für } x \in M \setminus \{o\}.$$

Proposition. *Ist $(M, \mathbf{g})$ ein riemannsches Modell, sodass $M \setminus \{o\}$ isometrisch zu $(0, R) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1}$ ist, so gilt*

$$\rho_{\mathbf{g}}(x, o) = r(x).$$

Weiterhin gilt

$$\mathrm{vol}_{\mathbf{g}}(B_r(o)) = \omega_n \int_0^r \psi^{n-1}(r)\, \mathrm{d}r,$$

wobei ω_n das Volumen von $\mathbb{S}^{n-1}$ ist.

Beweis. Die Aussage über die Metrik lässt sich leicht nachrechnen (vgl. Situation im $\mathbb{R}^n$). Die Aussage über das Volumen folgt sofort aus der vorigen Proposition. □

Bemerkung. Aus der vorigen Proposition und der Diskussion über die Vollständigkeit des metrischen Raumes $(M, \rho_{\mathbf{g}})$ folgt, dass ein Modell genau dann vollständig ist, wenn es unendlichen Radius hat.

Ende 9. Vorlesung

KAPITEL 2

Der Laplace-Beltrami-Operator

1. Der Laplace-Beltrami-Operator

In diesem Abschnitt führen wir das Hauptobjekt dieser Vorlesung, den Laplace-Beltrami Operator, ein. Zunächst benötigen wir noch den Begriff der Divergenz eines Vektorfeldes.

Theorem (Existenz und Eigenschaften der Divergenz)**.** *Es sei* $(M, \mathbf{g})$ *eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Für jedes glatte Vektorfeld* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *existiert eine eindeutige Funktion* $\mathrm{div}X \in C^\infty(M)$*, sodass*

$$\int_M (\mathrm{div}X)\, \varphi \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} = -\int_M \langle X, \nabla_{\mathbf{g}}\varphi\rangle_{\mathbf{g}} \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(M)$*.*

Beweis. Todo! □

Bemerkung.

- Ist X ein glattes Vektorfeld und sind (x^i) lokale Koordinaten, so folgt aus dem Beweis
$$\begin{aligned}\mathrm{div}X &= \frac{1}{\det(g_{ij})}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\det(g_{ij})X^k\right)\\ &= \frac{\partial X^k}{\partial x^k} + X^k\frac{\partial}{\partial x^k}\log\sqrt{\det(g_{ij})}.\end{aligned}$$
Man kann div alternativ auch über diese Formel definieren, muss dann aber nachrechnen, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Karte ist.
- Die Formel
$$\int_M (\mathrm{div}X)\varphi \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}} = -\int_M \langle X, \nabla_{\mathbf{g}}\,\varphi\rangle_{\mathbf{g}} \,\mathrm{dvol}_{\mathbf{g}}$$
gilt auch dann noch, wenn X ein kompakt getragenes glattes Vektorfeld und φ eine beliebige glatte Funktion ist (Übung).

Definition (Laplace-Beltrami-Operator)**.** Sei $(M, \mathbf{g})$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Operator

$$\Delta := \mathrm{div} \circ \nabla_{\mathbf{g}} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

heißt *Laplace-Beltrami-Operator.*

In lokalen Koordinaten (x^i) ist der Operator gegeben durch

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^l} f \right).$$

Theorem (Greensche Formel)**.** *Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $f \in C^\infty(M)$ und $\varphi \in C_c^\infty(M)$ gilt*

$$\int_M f(\Delta\varphi)\, \mathrm{dvol}_\mathbf{g} = -\int_M \langle \nabla_\mathbf{g} f, \nabla_\mathbf{g} \varphi \rangle_\mathbf{g}\, \mathrm{dvol}_\mathbf{g} = \int_M (\Delta f)\varphi\, \mathrm{dvol}_\mathbf{g}.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den Eigenschaften der Divergenz und der Beobachtung, dass $\nabla_\mathbf{g}\varphi$ auch kompakten Träger hat. $\square$

Bemerkung. Für die Gültigkeit der Greenschen Formel ist es wichtig, dass eine Funktion kompakten Träger hat. Sonst tauchen in der Formel noch Randterme auf, vgl. die Situation im $\mathbb{R}^n$.

Um interessante Beispiele zu erhalten, ist es manchmal notwendig, allgemeinere Maße als $\mathrm{vol}_\mathbf{g}$ zu betrachten.

Definition (Gewichtete Mannigfaltigkeit)**.** Ein Tripel $(M, \mathbf{g}, \mu)$ heißt *gewichtete Mannigfaltigkeit*, falls $(M, \mathbf{g})$ eine riemannschen Mannigfaltigkeit und μ ein Borel-Maß auf M ist, für welches eine glatte Funktion $\Upsilon : M \to (0, \infty)$ existiert, sodass $\mathrm{d}\mu = \Upsilon\, \mathrm{dvol}_\mathbf{g}$.

Ist $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine gewichtete Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{d}\mu = \Upsilon\, \mathrm{dvol}_\mathbf{g}$, so definiert man die *gewichtete Divergenz*

$$\mathrm{div}_\mu : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

durch

$$\mathrm{div}_\mu X = \frac{1}{\Upsilon} \mathrm{div}(\Upsilon X).$$

Analog definiert man $\Delta_\mu := \mathrm{div}_\mu \circ \nabla_\mathbf{g}$, den *gewichteten Laplace Operator*. Ersetzt man überall $\mathrm{vol}_\mathbf{g}$ durch μ, so gilt die Greensche Formel auch für Δ_μ. In lokalen Koordinaten (x^i) erhalten wir

$$\mathrm{div}_\mu X = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho X^i)$$

und

$$\Delta_\mu f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} f \right),$$

wobei $\rho = \Upsilon \sqrt{\det(g_{ij})}$.

2. Distributionen

Es ist das Ziel der Vorlesung operatortheoretische Eigenschaften von Δ_μ mithilfe der Geometrie von $(M, \mathbf{g})$ zu untersuchen. Leider haben der Raum der glatten Funktionen und Δ_μ als Abbildung auf glatten Funktionen schlechte funktionalanalytische Eigenschaften. Deshalb erweitern wir Δ_μ zunächst auf Distributionen und schränken ihn später auf L^2-Funktionen ein.

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir betrachten nun $C_c^\infty(M)$ als Raum von Testfunktionen, statten ihn mit einem entsprechenden Konvergenzbegriff aus und schreiben $\mathcal{D}(M)$ statt $C_c^\infty(M)$ um diese Konvergenz hervorzuheben. Für eine Karte (U, φ) mit lokalen Koordinaten (x^i) und einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} := \partial^\alpha(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi : U \to \mathbb{R}.$$

Dabei ist wie wie üblich $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha^1} \cdots \partial_n^{\alpha^n}$, falls $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$.

Definition (Konvergenz in $\mathcal{D}(M)$)**.** Eine Folge (ψ_n) in $\mathcal{D}(M)$ konvergiert gegen $\psi \in \mathcal{D}(M)$, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- Es existiert eine kompakte Menge $K \subseteq M$, sodass $\operatorname{supp} \psi_n \subseteq K$ für alle (großen) $n \in \mathbb{N}$,
- für alle Karten (U, φ) und alle Multiindizes α konvergiert die Folge $(\frac{\partial \psi_n}{\partial x^\alpha})$ gleichmäßig gegen $\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}$.

In diesem Falle schreiben wir $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi$.

Bemerkung.

- Es gibt eine Vektorraumtopologie, die den oben definierten Konvergenzbegriff auf auf $\mathcal{D}(M)$ induziert. Wenn M nicht kompakt ist, ist diese allerdings nicht metrisierbar. Betrachte zum Beispiel $M = \mathbb{R}$ und eine Folge von glatten Funktionen (ψ_n), mit $\psi_n = 1$ auf $[-n, n]$ und $\psi_n = 0$ auf $\mathbb{R} \setminus [-(n+1), n+1]$. Angenommen die Vektorraumtopologie von $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ wäre von einer Metrik d erzeugt. Da die Skalarenmultiplikation auf topologischen Vektorräumen stetig ist, existieren $c_n > 0$, sodass
$$c_n \psi_n \in B^d_{1/n}(0).$$
Demzufolge konvergiert die Folge $(c_n \psi_n)$ in $\mathcal{D}(M)$ gegen 0. Dies kann aber nicht sein, da die Träger der Funktionen in keiner festen kompakten Menge enthalten sind. Dies ist ein Widerspruch.
- Wenn wir von Stetigkeit von Abbildungen auf $\mathcal{D}(M)$ sprechen, meinen wir immer Folgenstetigkeit.

Definition (Distribution)**.** Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *Distribution* ist eine stetige Abbildung $u : \mathcal{D}(M) \to \mathbb{R}$. Die Gesamtheit aller Distributionen bezeichnen wir mit $\mathcal{D}'(M)$.

Ist u eine Distribution, so schreiben wir $\langle u, \psi \rangle$ für ihren Wert an der Stelle ψ. Wir statten $\mathcal{D}'(M)$ mit der schwach-*-Topologie, d.h. der von den Umgebungen

$$V_{\psi,\varepsilon}(u) := \{v \in \mathcal{D}'(M) \mid |\langle u - v, \psi \rangle| < \varepsilon\}$$

erzeugten Topologie, aus. Bezüglich dieser Topologie konvergiert eine Folge von Distributionen (u_n) genau dann gegen $u \in \mathcal{D}'(M)$, falls für alle $\psi \in \mathcal{D}(M)$ gilt $\langle u_n, \psi \rangle \to \langle u, \psi \rangle$.

Ende 10. Vorlesung

Definition (Träger einer Distribution)**.** Es sei $u \in \mathcal{D}'(M)$ und O die größte offene Teilmenge von M, sodass $\langle u, \varphi \rangle = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(O)$. Die Menge $\operatorname{supp} u := M \setminus O$ heißt *Träger* von u.

Bemerkung. Es ist noch zu zeigen, dass der Träger wohldefiniert ist (Übung).

Erinnerung: Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine gewichtete Mannigfaltigkeit. Die lokalen L^p-Räume sind definiert durch

$$L^p_{\mathrm{loc}}(\mu) := \{f \in L^0(\mu) \mid f 1_K \in L^p(\mu) \text{ für alle kompakten } K \subseteq M\}.$$

Eine Folge (f_n) konvergiert in $L^p_{\mathrm{loc}}(\mu)$ gegen $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mu)$, falls für jede kompakte Menge $K \subseteq M$ gilt

$$\|f_n 1_K - f 1_K\|_p \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Wir interpretieren nun die Lebesgue-Räume als Unterräume von $\mathcal{D}'(M)$. Sei dazu $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu gegebenem $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ definieren wir die Distribution u_f durch

$$u_f : \mathcal{D}(M) \to \mathbb{R},\ \psi \mapsto \int_M f\psi \, \mathrm{d}\mu.$$

Das nächste Lemma zeigt, dass die zugehörige Abbildung

$$I_\mu : L^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \to \mathcal{D}'(M),\ f \mapsto u_f$$

injektiv ist.

Lemma. *Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Es gilt $f = 0$ genau dann, wenn $u_f = 0$.*

Beweis. Mit entsprechender Aussage im $\mathbb{R}^n$. Todo! □

Distributionen, die durch Funktionen induziert werden, spielen eine besondere Rolle und bekommen daher einen eigenen Name.

Definition (Reguläre Distribution)**.** Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(M)$ heißt *regulär*, falls es eine Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ gibt, mit $u = u_f$.

Bemerkung. Da die betrachteten Maße alle glatte strikt positive Dichten bezüglich $\mathrm{vol}_\mathbf{g}$ haben, ist die Regularität einer Distribution unabhängig vom Maß μ. Es gilt also $I_\mu(L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)) = I_{\mu'}(L^1_{\mathrm{loc}}(\mu'))$. Die konkrete Abbildung I_μ hängt allerdings schon von Maß ab. Gilt $\mu = \Upsilon \mathrm{vol}_\mathbf{g}$ und $\mu' = \Upsilon' \mathrm{vol}_\mathbf{g}$, so erhalten wir

$$I_\mu(f) = I_{\mu'}((\Upsilon')^{-1}\Upsilon f)$$

für alle

$$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu) = L^1_{\mathrm{loc}}(\mu') = L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{vol}_\mathbf{g}).$$

Im Folgenden wählen wir stets ein festes Referenzmaß und betrachten $L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ als Teilraum von $\mathcal{D}'(M)$. Wir missbrauchen die Notation und schreiben nur f für die Distribution $u_f = I_\mu(f)$.

Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Aus dem Satz von Lebesgue und den Definitionen der Topologien ergibt sich leicht, dass die folgenden Einbettungen stetig sind:

$$\mathcal{D}(M) \hookrightarrow L^p(\mu) \hookrightarrow L^p_{\mathrm{loc}}(\mu) \hookrightarrow L^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \hookrightarrow \mathcal{D}'(M).$$

Für spätere Anwendungen benötigen wir noch den Begriff des Trägers einer Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Da f nur fast-überall gegeben ist, kann dieser nicht als Abschluss von $\{x \in M \mid f(x) > 0\}$ definiert werden. Stattdessen fassen wir f mithilfe der Einbettung I_μ als Distributionen auf, und definieren $\operatorname{supp} f := \operatorname{supp} I_\mu(f)$ als Träger der zugehörigen Distribution. Dieser ist ebenfalls unabhängig vom Maß μ.

Wir haben die Topologie auf $\mathcal{D}(M)$ so gewählt, dass der (gewichtete) Laplace-Operator (und überhaupt alle anderen genügend guten Differentialoperatoren) stetig sind. Wir definieren

$$\Delta_\mu : \mathcal{D}'(M) \to \mathcal{D}'(M),\ \psi \mapsto \langle \Delta_\mu u, \psi \rangle := \langle u, \Delta_\mu \psi \rangle.$$

Aufgrund der Greenschen Formel ist dies eine Erweiterung von Δ_μ, von $C^\infty(M)$ auf $\mathcal{D}'(M)$.

Es ist auch möglich distributionelle Versionen der partiellen Ableitungen (und allgemeineren Vektorfeldern) einzuführen. Da diese auf $\mathcal{D}(M)$ nicht symmetrisch bezüglich der Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sind, muss die Definition entsprechend angepasst werden. Für eine Karte (U, φ) mit die zugehörigen Koordinatenfunktionen (x^i) definieren wir

$$D_i : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(U),\ D_i\psi := \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^i}(\rho\,\psi),$$

wobei $\rho = \Upsilon\sqrt{\det(g_{ij})}$. Ähnlich wie beim Beweis der Existenz der Divergenz rechnet man leicht nach, dass für $\psi, \eta \in \mathcal{D}(U)$ gilt

$$\int_U \frac{\partial}{\partial x^i}\psi\eta \,\mathrm{d}\mu = -\int_U \psi D_i\eta \,\mathrm{d}\mu.$$

Wir definieren nun

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : \mathcal{D}'(U) \to \mathcal{D}'(U),\ \psi \mapsto \langle \frac{\partial}{\partial x^i}u, \psi\rangle := -\langle u, D_i\psi\rangle.$$

Wegen der oben nachgerechneten partiellen Integrationsregel, ist $\frac{\partial}{\partial x^i}$ auf $\mathcal{D}'(M)$ eine Fortsetzung von $\frac{\partial}{\partial x^i}$ auf $\mathcal{D}(M)$ (und sogar von $\frac{\partial}{\partial x^i}$ auf $C^\infty(U)$). Da alle Vektorfelder lokal als Linearkombination der $\frac{\partial}{\partial x^i}$ dargestellt werden können, liefert dies auch lokale distributionelle Versionen beliebiger Vektorfelder.

Analog zum skalaren Fall können auch Vektorwertige Distributionen eingeführt werden. Wir geben hier nur eine kleine Skizze. Der Raum der Testfunktionen ist in diesem Fall der Raum der glatten Vektorfelder mit kompaktem Träger. Ihn bezeichnen wir mit $\vec{\mathcal{D}}(M)$. Die Konvergenz in $\vec{\mathcal{D}}(M)$ definiert man mithilfe der Konvergenz in $\mathcal{D}(M)$. Wir sagen eine Folge von Vektorfeldern (ω_n) in $\vec{\mathcal{D}}(M)$ konvergiert gegen $\omega \in \vec{\mathcal{D}}(M)$, falls für jede Karte (U, φ) mit lokalen Koordinaten (x^i) die Funktionen $\omega_n(x^i) : U \to \mathbb{R}$ in $\mathcal{D}(U)$ gegen $\omega(x^i) : U \to \mathbb{R}$ konvergieren. In diesem Fall schreiben wir $\omega_n \xrightarrow{\vec{\mathcal{D}}} \omega$. Den stetigen Dualraum zu $\vec{\mathcal{D}}(M)$ bezeichnen wir mit $\vec{\mathcal{D}}'(M)$, seine Elemente heißen Vektorwertige Distributionen. Wie im skalaren Fall statten wir ihn mit der schwach-*-Topologie aus.

Ein Vektorfeld $X : M \to TM$ heißt messbar, falls für jede Karte (U, φ) mit lokalen Koordinaten (x^i) die Abbildungen $X(x^i) : U \to \mathbb{R}$ Borel-messbar sind. Sind X, Y messbare Vektorfelder, so ist die Abbildung

$$M \to \mathbb{R},\ p \mapsto \mathbf{g}(p)(X_p, Y_p)$$

Borel-messbar (Übung). Mit $\vec{L}^0(\mu)$ bezeichnen wir den Quotienten des Raumes aller messbaren Vektorfelder bezüglich der Äquivalenzrelation

$$X \sim Y :\Longleftrightarrow |X - Y|_{\mathbf{g}} = 0\ \mu\text{-fast sicher}.$$

Die zugehörigen Vektorwertigen L^p-Räume sind gegeben durch

$$\vec{L}^p(\mu) := \{X \in \vec{L}^0(\mu) \mid |X|_{\mathbf{g}} \in L^p(\mu)\}$$

und

$$\vec{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mu) := \{X \in \vec{L}^0(\mu) \mid |X|_{\mathbf{g}} \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mu)\}.$$

Ausgestattet mit der Norm

$$\|\cdot\|_p : \vec{L}^p(\mu) \to [0, \infty),\ X \mapsto \|X\|_p := \||X|_{\mathbf{g}}\|_p$$

ist $\vec{L}^p(\mu)$ ein Banachraum (Übung). Wir sagen $X_n \to X$ in $\vec{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mu)$, falls $|X_n - X|_{\mathbf{g}} \to 0$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Zu gegebenem $X \in \vec{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ definieren wir die Distribution

$$U_X : \vec{\mathcal{D}}(M) \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \int_M \langle X, \omega\rangle_{\mathbf{g}}\, \mathrm{d}\mu$$

und identifizieren X mit U_X. Ähnlich wie oben erhalten wir die Injektivität und die Stetigkeit der Einbettungen

$$\vec{\mathcal{D}}(M) \hookrightarrow \vec{L}^p(\mu) \hookrightarrow \vec{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mu) \hookrightarrow \vec{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \hookrightarrow \vec{\mathcal{D}}'(M).$$

Die Operatoren

$$\nabla_{\mathbf{g}} : \mathcal{D}(M) \to \vec{\mathcal{D}}(M) \text{ und } \mathrm{div}_\mu : \vec{\mathcal{D}}(M) \to \mathcal{D}(M)$$

sind stetig. Wir definieren ihre distributionellen Varianten durch

$$\nabla_{\mathbf{g}} : \mathcal{D}'(M) \to \vec{\mathcal{D}}'(M),\ \omega \mapsto \langle \nabla_{\mathbf{g}} u, \omega\rangle := -\langle u, \mathrm{div}_\mu \omega\rangle$$

und

$$\mathrm{div}_\mu : \vec{\mathcal{D}}'(M) \to \mathcal{D}'(M),\ \psi \mapsto \langle \mathrm{div}_\mu U, \psi\rangle := -\langle U, \nabla_{\mathbf{g}} \psi\rangle.$$

Auch diese Operatoren sind stetige Fortsetzungen der entsprechenden Operatoren auf den Testfunktionen und die Gleichung $\Delta_\mu = \mathrm{div}_\mu \circ \nabla_{\mathbf{g}}$ wird auf $\mathcal{D}'(M)$ fortgesetzt (Übung).

3. Sobolev-Räume erster Ordnung

Wir lernen nun einige wichtige Funktionenräume und ihre Grundlegenden Eigenschaften kennen. Dies dient als technische Grundlage für die weiteren Betrachtungen.

Definition (Sobolev-Räume erster Ordnung)**.** Der Funktionenraum

$$W^1(M, \mu) := \{ f \in L^2(\mu) \mid \nabla_{\mathbf{g}} f \in \vec{L}^2(\mu)\}$$

heißt *Sobolev-Raum erster Ordnung.* Er ist ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|^2_{W^1} := \int_M |\nabla_{\mathbf{g}} f|^2_{\mathbf{g}}\, \mathrm{d}\mu + \int_M f^2\, \mathrm{d}\mu.$$

Den Abschluss von $C_c^\infty(M)$ in $W^1(M, \mu)$ bezeichnen wir mit $W^1_0(M, \mu)$. Der *lokale Sobolev-Raum erster Ordnung* ist gegeben durch

$$W^1_{\mathrm{loc}}(M, \mu) := \{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu) \mid \nabla_{\mathbf{g}} f \in L^2_{\mathrm{loc}}(M, \mu)\}.$$

Ende 11. Vorlesung

Proposition (Vollständigkeit W^1)**.** *Es sei* $(M, \mathbf{g}, \mu)$ *eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Sobolev-Raum* $(W^1(M, \mu), \|\cdot\|_{W^1})$ *ist vollständig.*

Beweis. Es sei (f_n) eine Cauchyfolge in $W^1(M,\mu)$. Da $L^2(\mu)$ und $\vec{L}^2(\mu)$ vollständig sind, existieren $f \in L^2(\mu)$ und $X \in \vec{L}^2(\mu)$ mit $f_n \to f$ in $L^2(\mu)$ und $\nabla_{\mathbf{g}} f_n \to X$ in $\vec{L}^2(\mu)$. Für eine Testvektorfeld $\omega \in \vec{\mathcal{D}}(M)$ gilt

$$\langle \nabla_{\mathbf{g}} f, \omega \rangle = -\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \operatorname{div}_\mu \omega \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \nabla_{\mathbf{g}} f_n, \omega \rangle = \langle X, \omega \rangle.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir $X = \nabla_g f$ und damit die Vollständigkeit von $W^1(M,\mu)$. □

Bemerkung.

- Vollkommen analog kann man Sobolev-Räume auch bezüglich anderer L^p-Räume einführen. In diesem Fall schreibt man $W^{1,p}(M,\mu)$, und mit obiger Notation gilt
$$W^{1,2}(M,\mu) = W^1(M,\mu).$$
Für unsere Zwecke genügen die L^2-Versionen.
- Auf Mannigfaltigkeiten ist es nicht so leicht global Sobolev-Räume höherer Ordnung einzuführen. Wir werden dies allerdings unten für offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ tun.

Für später benötigen wir folgende Charakterisierung des lokalen Sobolev-Raumes.

Lemma. *Es sei $(M,\mathbf{g},\mu)$ eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ sind äquivalent:*

(i) $f \in W^1_{\mathrm{loc}}(M,\mu)$.

(ii) *Für alle Karten (U,φ) mit lokalen Koordinaten (x^i) gilt*
$$\frac{\partial}{\partial x^i} f \in L^2_{\mathrm{loc}}(U,\mu).$$

In diesem Fall ist $\nabla_{\mathbf{g}} f$ in lokalen Koordinaten (x^i) gegeben durch

$$\nabla_{\mathbf{g}} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Beweis. Übung. □

Lemma (Produktregel)**.** *Es sei $(M,\mathbf{g},\mu)$ eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $u \in W^1_{\mathrm{loc}}(M,\mu)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ gilt*

$$\nabla_{\mathbf{g}}(\varphi \cdot u) = \varphi \nabla_{\mathbf{g}} u + u \nabla_{\mathbf{g}} \varphi.$$

Beweis. Übung. □

In der folgenden Proposition bezeichnen wir mit $W^1_c(M,\mu)$ die Elemente aus $W^1(M,\mu)$ mit kompaktem Träger.

Proposition. *Es sei $(M,\mathbf{g},\mu)$ eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gilt $W^1_c(M,\mu) \subseteq W^1_0(M,\mu)$.*

Beweis. Zunächst zeigen wir die Aussage für Funktionen, deren Träger in einer Karte enthalten ist. Sei dazu $f \in W^1_c(M,\mu)$ und eine Karte (U,φ) mit $\operatorname{supp} f \subseteq U$ gegeben. Seien weiterhin (x^i) die zugehörigen lokalen Koordinaten. Wir definieren $V := \varphi(U)$ und die Koordinatendarstellung $\bar{f} := f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{R}$.

Es sei $\eta : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ ein Mollifier, d.h. eine glatte Abbildung mit $\operatorname{supp} \eta \subseteq B_1(0)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, \mathrm{d}x = 1.$$

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to [0,\infty),\ \eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$$

und

$$\bar{f}_\varepsilon := \bar{f} * \eta_\varepsilon,$$

wobei $\bar{f}$ durch 0 auf $\mathbb{R}^n \setminus V$ fortgesetzt wurde. Die Funktionenfolge (f_ε) hat die folgenden schönen Eigenschaften (Übung!):

- $\operatorname{supp} \bar{f}_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon(\operatorname{supp} \bar{f}) \subseteq V$ für kleine ε.
- $\bar{f}_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $\varepsilon > 0$.
- $\bar{f}_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \bar{f}$ in $L^2(\mathbb{R}^n,\lambda)$.
- $\partial_i \bar{f}_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \partial_i \bar{f}$ in $L^2(\mathbb{R}^n,\lambda)$.

Diese Aussagen implizieren $\bar{f}_\varepsilon \in C^\infty_c(V)$ für kleine ε und die Konvergenz $\bar{f}_\varepsilon \to \bar{f}$ in $W^1(V,\lambda)$. Wir definieren $f_\varepsilon := \bar{f}_\varepsilon \circ \varphi$. Da für kleine ε der Träger von f_ε kompakt und in U enthalten ist, können wir f_ε durch 0 außerhalb von U glatt auf ganz M fortsetzen und es gilt $f_\varepsilon \in C^\infty_c(M)$.

Man rechnet leicht nach, dass die distributionellen partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial x^i}$ auf $\mathcal{D}'(U)$ und die distributionellen partiellen Ableitungen ∂_i auf $\mathcal{D}'(V)$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f = (\partial_i \bar{f}) \circ \varphi$$

erfüllen (das Gleiche gilt für f_ε und $\bar{f}_\varepsilon$). Achtung: Hier wird f als Distribution $I_\mu(f)$ und $\bar{f}$ als Distribution $I_\lambda(\bar{f})$ aufgefasst.

Wegen dieser Identität, und weil die Dichte von $\mu \circ \varphi^{-1}$ bezüglich λ auf kompakten Mengen beschränkt ist, erhalten wir $f_\varepsilon \to f$ in $L^2(M,\mu)$ und $\frac{\partial}{\partial x^i} f_\varepsilon \to \frac{\partial}{\partial x^i} f$ in $L^2(U,\mu)$. Aus diesem Resultat und der Darstellung des distributionellen Gradienten in Koordinaten (s.o.) folgt $f_\varepsilon \to f$ in $W^1(M,\mu)$. Dies zeigt die Behauptung für Funktionen mit Träger im Definitionsgebiet einer Karte.

Es sei nun $f \in W^1_c(M,\mu)$ beliebig. Wir wählen endlich viele Karten (U_i,φ_i), welche den Träger von f überdecken. Ferner wählen wir endlich viele Funktionen $\psi_i \in C^\infty_c(M)$, mit

- $\operatorname{supp}\psi_i \subseteq U_i$,
- $0 \le \psi_i \le 1$,
- $\sum_{i=1}^n \psi_i = 1$ auf $\operatorname{supp} f$,

und definieren $f_i := \psi_i f$. Aufgrund der Produktregel gilt

$$\nabla_{\mathbf{g}}(f_i) = \psi_i \nabla_{\mathbf{g}} f + f \nabla_{\mathbf{g}} \psi_i,$$

und deshalb $f_i \in W^1(M,\mu)$. Da $f = \sum_i f_i$ und jedes f_i im Definitionsbereich einer Karte getragen ist, folgt die Aussage aus dem bereits Bewiesenen. $\square$

Proposition (Kettenregel)**.** *Es sei* $(M, \mathbf{g}, \mu)$ *eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit und* $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *glatt, mit*

$$C(0) = 0 \text{ und } C' \in C_b(\mathbb{R}).$$

Für $f \in W^1(M,\mu)$ *gilt* $C \circ f \in W^1(M,\mu)$ *und* $\nabla_{\mathbf{g}}(C \circ f) = (C' \circ f)\nabla_{\mathbf{g}} f$.

Beweis. Sei zunächst $f \in W_0^1(M,\mu)$. Wir wählen eine Folge (f_n) in $C_c^\infty(M)$, welche in $W^1(M,\mu)$ gegen f konvergiert. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $f_n \to f$ μ-fast sicher. Nach der üblichen Kettenregel gilt

$$\nabla_{\mathbf{g}}(C \circ f_n) = (C' \circ f_n)\nabla_{\mathbf{g}} f_n.$$

Da C eine Lipschitz-Funktion ist, konvergiert $C \circ f_n$ in $L^2(\mu)$ gegen $C \circ f$. Ferner folgt nach dem Satz über dominierte Konvergenz

$$(C' \circ f_n)\nabla_{\mathbf{g}} f_n \to (C' \circ f)\nabla_{\mathbf{g}} f \text{ in } \vec{L}^2(\mu).$$

Die Stetigkeit von $\nabla_{\mathbf{g}}$ auf $\mathcal{D}'(M)$ und die Stetigkeit der Einbettungen $L^2(\mu) \hookrightarrow \mathcal{D}'(M)$ und $\vec{L}^2(\mu) \hookrightarrow \vec{\mathcal{D}}'(M)$ liefern

$$\nabla_{\mathbf{g}}(C \circ f) = \lim_{n\to\infty} \nabla_{\mathbf{g}}(C \circ f_n) = \lim_{n\to\infty} (C' \circ f_n)\nabla_{\mathbf{g}} f_n = (C' \circ f)\nabla_{\mathbf{g}} f,$$

wobei die Konvergenz im Sinne von $\vec{\mathcal{D}}'(M)$ erfolgt. Daraus folgt der Satz für Funktionen in $W_0^1(M,\mu)$.

Sei nun $f \in W^1(M,\mu)$ beliebig. Sei $U \subseteq M$ relativ kompakt und offen und sei $\psi \in C_c^\infty(M)$ mit $\psi = 1$ auf U. Wegen der Produktregel und der vorherigen Proposition gilt $\psi f \in W_c^1(M,\mu) \subseteq W_0^1(M,\mu)$. Aus dem bisher Gezeigten folgt

$$\nabla_{\mathbf{g}}(C \circ (\psi f)) = (C' \circ (\psi f))\nabla_{\mathbf{g}}(\psi f).$$

Wegen $\psi = 1$ auf U, folgt die gewünschte Aussage auf U. Da U beliebig war, beendet dies den Beweis. $\square$

4. Dirichlet-Formen und selbstadjungierte Realisierungen

In diesem Abschnitt kommen wir nun (endlich) zu selbstadjungierten Realisierungen des Laplace-Operators. Deren Eigenschaften sind von Relevanz in Physik und Stochastik.

Sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Mit

$$\mathcal{L} : C_c^\infty(M) \to L^2(\mu),\ \mathcal{L}f = -\Delta_\mu f$$

bezeichnen wir die Einschränkung von $-\Delta_\mu$ auf $D(\mathcal{L}) = C_c^\infty(M)$. Nach den Greenschen Formeln ist $\mathcal{L}$ ein symmetrischer Operator. Aus dem Friedrichsschen Fortsetzungssatz (ein Spezialfall der Formmethode (s.u.)) folgt, dass $\mathcal{L}$ eine selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{\mathcal{L}}$ hat. Nach Abstrakten Prinzipien muss sie $\mathcal{L} \subseteq \tilde{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{L}^*$ erfüllen. Das folgende Lemma zeigt, dass $\tilde{\mathcal{L}}$ dann eine Einschränkung des distributionellen Laplace-Operators sein muss.

Lemma (Adjungierter von $\mathcal{L}$)**.** *Es gilt*

$$D(\mathcal{L}^*) = \{f \in L^2(\mu) \mid \Delta_\mu f \in L^2(\mu)\}$$

und

$$\mathcal{L}^* f = -\Delta_\mu f.$$

Beweis. Der Definitionsbereich von $\mathcal{L}^*$ erfüllt nach Definition

Ende 12. Vorlesung

$$D(\mathcal{L}^*) = \{f \in L^2(\mu) \mid D(\mathcal{L}) \to \mathbb{R},\ \psi \to \langle f, \mathcal{L}\psi\rangle_2 \text{ stetig bez. } \|\cdot\|_2\}.$$

Sei $f \in L^2(\mu)$ mit $\Delta_\mu f \in L^2(\mu)$ gegeben. Nach Definition des distributionellen Laplace-Operators gilt für $\psi \in D(\mathcal{L}) = C_c^\infty(M)$

$$\langle f, \mathcal{L}\psi\rangle_2 = -\langle f, \Delta_\mu \psi\rangle_2 = -\langle \Delta_\mu f, \psi\rangle_2.$$

Somit ist die Abbildung $D(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}$, $\psi \mapsto \langle f, \mathcal{L}\psi\rangle_2$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_2$ und $f \in D(\mathcal{L}^*)$.

Sei nun $f \in D(\mathcal{L}^*)$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert ein $g \in L^2(\mu)$, sodass

$$-\langle f, \Delta_\mu \psi\rangle_2 = \langle f, \mathcal{L}\psi\rangle_2 = \langle g, \psi\rangle_2 \text{ für alle } \psi \in D(\mathcal{L}) = C_c^\infty(M).$$

Nach der Definition des distributionellen Laplace-Operators bedeutet dies aber $-\Delta_\mu f = g$. Weiterhin folgt die Gleichung $\mathcal{L}^* f = -\Delta_\mu f$ aus dieser Darstellung. $\square$

Wir erinnern nun zunächst an den Begriff der Dirichlet-Form und der assoziierten Objekte.

Definition (Dirichlet-Form)**.** Eine Bilinearform $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \times D(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D(\mathcal{E}) \subseteq L^2(\mu)$ heißt Dirichlet-Form, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- $D(\mathcal{E})$ ist dicht in $L^2(\mu)$.

- $\mathcal{E}$ ist abgeschlossen, d.h. $D(\mathcal{E})$ ausgestattet mit dem *Formskalarprodukt*
$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{E}} := \mathcal{E}(f,g) + \int_M fg \,\mathrm{d}\mu$$
ist vollständig.
- $\mathcal{E}$ besitzt die Kontraktionseigenschaft (ist Markoffsch), d.h. für alle $f \in D(\mathcal{E})$ gilt $(f \wedge 1) \vee 0 \in D(\mathcal{E})$ und
$$\mathcal{E}((f \wedge 1) \vee 0) \leq \mathcal{E}(f).$$

Bemerkung. Wir verwenden hier und im Folgenden die Konvention
$$\mathcal{E}(f) := \begin{cases} \mathcal{E}(f,f) & \text{falls } f \in D(\mathcal{E}), \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$
In diesem Sinne gilt $D(\mathcal{E}) = \{f \in L^2(\mu) \mid \mathcal{E}(f) < \infty\}$. Die Abbildung $\mathcal{E} : L^2(\mu) \to [0,\infty]$ ist eine quadratische Form, d.h. sie erfüllt
$$\mathcal{E}(f+g) + \mathcal{E}(f-g) = 2\mathcal{E}(f) + 2\mathcal{E}(g) \text{ und } \mathcal{E}(\lambda f) = |\lambda|^2 \mathcal{E}(f)$$
für alle $f, g \in L^2(\mu)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Mittels Polarisierung erhält man die Bilinearform auf $D(\mathcal{E})$ zurück, d.h für $f, g \in D(\mathcal{E})$ gilt
$$\mathcal{E}(f,g) = \frac{1}{4}(\mathcal{E}(f+g) - \mathcal{E}(f-g)).$$
Quadratische Formen mit Werten in $[0,\infty]$ und Bilinearformen mit Definitionsbereich sind demnach äquivalente Objekte.

Erinnerung. Zu jeder Dirichlet-Form gehört ein eindeutig bestimmter nichtnegativer selbstadjungierter Operator L auf $L^2(\mu)$. Sein Definitionsbereich ist gegeben durch
$$D(L) = \{f \in D(\mathcal{E}) \mid \text{ex. } g \in L^2(\mu) \text{ mit } \mathcal{E}(f,h) = \langle g, h\rangle_2 \text{ für } h \in D(\mathcal{E})\}$$
und auf ihm operiert L mittels
$$Lf = g.$$
Das Spektrum $\sigma(L)$ ist enthalten in $[0,\infty)$. Die Resolvente $\alpha G_\alpha := \alpha(L+\alpha)^{-1}$, $\alpha > 0$, und die mittels des Spektralkalküls definierte Halbgruppe $T_t := e^{-tL}, t > 0$, sind Markoffsche Operatoren. Dies bedeutet, dass für $f \in L^2(\mu)$ mit $0 \leq f \leq 1$ gilt
$$0 \leq \alpha G_\alpha f \leq 1 \text{ und } 0 \leq T_t f \leq 1.$$
Eine Konsequenz aus der Markoff-Eigenschaft ist, dass die Resolvente und die Halbgruppe auf allen L^p-Räumen als Kontraktionen operieren. Für $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in L^p(\mu) \cap L^2(\mu)$ gilt nämlich
$$\|\alpha G_\alpha f\|_p \leq \|f\|_p \text{ und } \|T_t f\|_p \leq \|f\|_p.$$
Demnach lassen sich die Resolvente und die Halbgruppe zu Kontraktionen auf $L^p(\mu)$ für $1 \leq p < \infty$ fortsetzen. Für eine Fortsetzung auf

Referenz

$L^\infty(\mu)$ nutzt man monotone Grenzwerte (oder Dualität). Für nichtnegative $f \in L^\infty(\mu)_+$ wählt man eine Folge (f_n) in $L^2(\mu)_+$, mit $f_n \nearrow f$ μ-fast sicher, und definiert

$$T_t f := \lim_{n\to\infty} T_t f_n \text{ und } \alpha G_\alpha f := \lim_{n\to\infty} \alpha G_\alpha f_n.$$

Aufgrund der Markoff-Eigenschaft existiert dieser Grenzwert (punktweise μ-fast überall) und ist unabhängig von der gewählten Folge. Für beliebiges $f \in L^\infty(\mu)$ setzt man dann

$$T_t f := T_t f_+ - T_t f_- \text{ und } \alpha G_\alpha f := \alpha G_\alpha f_+ - \alpha G_\alpha f_-.$$

Im Folgenden schreiben wir (G_α) für die Resolvente und (T_t) für die Halbgruppe auf allen L^p-Räumen.

Für $1 \leq p < \infty$ sind sowohl Halbgruppe als auch Resolvente stark stetig auf $L^p(m)$, d.h. es gilt

$$\lim_{t\to 0+} \|T_t f - f\|_p = 0 \text{ und } \lim_{\alpha\to\infty} \|\alpha G_\alpha f - f\|_p = 0.$$

Für $p = \infty$ sind sie nur schwach-*-stetig, d.h. für alle $f \in L^\infty(m)$ und $g \in L^1(m)$ gilt

$$\lim_{t\to 0+} \langle T_t f - f, g\rangle = 0 \text{ und } \lim_{\alpha\to\infty} \langle G_\alpha f - f, g\rangle = 0.$$

Ist $p = 2$, so folgen diese Aussagen unmittelbar aus dem Spektralsatz, der allgemeinere Fall kann mittels Interpolation bewiesen werden.

Dirichlet-Formen (und allgemeiner abgeschlossene Formen) sind unterhalbstetig, d.h. $f_n \to f$ in $L^2(\mu)$ impliziert

$$\mathcal{E}(f) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}(f_n).$$

Tatsächlich ist Unterhalbstetigkeit eine Charakterisierung von Abgeschlossenheit (Übung*).

Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine gewichtete Mannigfaltigkeit. Die quadratischen Formen $\mathcal{E}^{(D)}$ und $\mathcal{E}^{(N)}$ definieren wir wie folgt. Der Definitionsbereich von $\mathcal{E}^{(N)}$ ist $D(\mathcal{E}^{(N)}) := W^1(M, \mu)$, auf welchem es durch

$$\mathcal{E}^{(N)}(f, g) := \int_M \langle \nabla_{\mathbf{g}} f, \nabla_{\mathbf{g}} g\rangle_{\mathbf{g}} \,\mathrm{d}\mu$$

operiert und die Form $\mathcal{E}^{(D)}$ ist die Einschränkung von $\mathcal{E}^{(N)}$ auf den Definitionsbereich $D(\mathcal{E}^{(D)}) := W_0^1(M, \mu)$.

Theorem. *Die quadratischen Formen $\mathcal{E}^{(D)}$ und $\mathcal{E}^{(N)}$ sind Dirichlet-Formen. Ihre assoziierten Operatoren $L^{(D)}$ und $L^{(N)}$ erfüllen*

$$\mathcal{L} \subseteq L^{(D)}, L^{(N)} \subseteq \mathcal{L}^*.$$

Beweis. Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{E}^{(D)}$ und $\mathcal{E}^{(N)}$ folgen aus der Vollständigkeit von $W^1(M,\mu)$. Um die Kontraktionseigenschaft nachzuweisen, wählen wir eine Folge von glatten Funktionen $C_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $C_n(x) = x$ für $x \in [0,1]$, $\|C_n'\|_\infty \leq 1$ und $-1/n \leq C_n \leq 1 + 1/n$. Sie konvergieren Punktweise gegen die Lipschitz-Funktion $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C(x) = (x \wedge 1) \vee 0$. Ferner gilt für $f \in L^2(\mu)$, dass $C_n \circ f \to C \circ f$ in $L^2(\mu)$. Die Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{E}^{(N)}$ und die Kettenregel auf $W^1(M,\mu)$ zeigt

Beweis der Existenz durch Zeichnung.

$$\mathcal{E}^{(N)}(C \circ f) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_M |C_n' \circ f|^2 |\nabla_{\mathbf{g}} f|_{\mathbf{g}}^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \mathcal{E}^{(N)}(f),$$

für alle $f \in W^1(M,\mu)$. Dies beweist die Kontraktionseigenschaft für $\mathcal{E}^{(N)}$. Um die Kontraktionseigenschaft für $\mathcal{E}^{(D)}$ nachzuweisen, müssen wir noch zeigen, dass $C \circ f \in W_0^1(M,\mu)$, falls $f \in W_0^1(M,\mu)$. Sei dazu $f \in W_0^1(M,\mu)$ und eine Folge (f_n) in $C_c^\infty(M)$, mit $f_n \to f$ in $W^1(M,\mu)$ gegeben. Offensichtlich gilt $C_m \circ f_n \in C_c^\infty(M) \subseteq W_0^1(M,\mu)$. Die Kettenregel und die Unterhalbstetigkeit von $\mathcal{E}^{(D)}$ liefern

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{(D)}(C \circ f) &\leq \liminf_{n\to\infty} \liminf_{m\to\infty} \mathcal{E}^{(D)}(C_m \circ f_n) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{E}^{(D)}(f_n) \\
&= \mathcal{E}^{(D)}(f).
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Aussage über die assoziierten Operatoren. Sei dazu $L \in \{L^{(D)}, L^{(N)}\}$ und sei $\mathcal{E}$ die zu L gehörige Dirichletform. Für alle $f \in C_c^\infty(M)$ und alle $h \in D(\mathcal{E})$ gilt nach der Definition von $\nabla_{\mathbf{g}}$ auf $\mathcal{D}'(M)$, dass

$$\langle -\Delta_\mu f, h\rangle_2 = -\langle h, \mathrm{div}_\mu \circ \nabla_{\mathbf{g}} f\rangle = \langle \nabla_{\mathbf{g}} h, \nabla_{\mathbf{g}} f\rangle = \mathcal{E}(f,h).$$

Aufgrund des Zusammenhanges von L und $\mathcal{E}$ folgt $f \in D(L)$ und $Lf = -\Delta_\mu f$. Die Aussage über die Inklusion im dualen Operator wurde oben schon bewiesen. $\square$

Bemerkung.

- Beim Beweis der Kontraktionseigenschaft von $\mathcal{E}^{(D)}$ konnten wir die Kettenregel erst dann verwenden, nachdem wir uns davon überzeugt hatten, dass $C_m \circ f_n$ zum Definitionsbereich von $\mathcal{E}^{(D)}$ gehören. Außerhalb vom Definitionsbereich stimmt $\mathcal{E}^{(D)}(f)$ nämlich nicht mit dem Integral
$$\int_M |\nabla_{\mathbf{g}} f|_{\mathbf{g}}^2 \,\mathrm{d}\mu$$
überein, sondern nimmt einfach den Wert ∞ an.
- Die Superskripte N und D stehen für Neumann- und Dirichlet-Randbedingungen. Ist nämlich $M = (a,b)$ ein offenes Intervall, versehen mit der euklidischen Metrik und dem Lebesgue-Maß, so gilt (Übung) $W^1((a,b)) \subseteq C([a,b])$ (jede Funktion

in $W^1((a,b))$ hat einen stetigen Repräsentanten, welcher sich stetig in die Randpunkte fortsetzen lässt),

$$D(\mathcal{E}^{(N)}) = \{f \in L^2((a,b)) \mid f' \in L^2((a,b))\}$$

und

$$D(\mathcal{E}^{(D)}) = \{f \in D(\mathcal{E}^{(N)}) \mid f(a) = f(b) = 0\}.$$

Die assoziierten selbstadjungierten Operatoren sind einschränken von $f \mapsto -f''$ und erfüllen

$$D(L^{(D)}) = \{f \in L^2((a,b)) \mid f'' \in L^2((a,b)) \text{ und } f(a) = f(b) = 0\}$$

und

$$D(L^{(N)}) = \{f \in L^2((a,b)) \mid f'' \in L^2((a,b)) \text{ und } f'(a) = f'(b) = 0\}.$$

Analoges gilt auch auf offenen Teilmengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, deren topologischer Rand $\partial\Omega$ genügend glatt ist. Allerdings ist dann das bilden der Randwerte einer Funktion $f \in W^1(\Omega)$ nicht mehr so einfach.

- Im Allgemeinen ist nicht klar, ob $\mathcal{E}^{(D)}$ und $\mathcal{E}^{(N)}$ verschieden sind. Wir haben oben an Beispielen gesehen, dass sich beide Formen dann unterscheiden, wenn M einen “Rand” hat. Tatsächlich ist es so, dass die Abwesenheit eines “Randes” zu $\mathcal{E}^{(D)} = \mathcal{E}^{(N)}$ führt. Unten untersuchen wir dieses Phänomen für vollständige Mannigfaltigkeiten, wobei Vollständigkeit als starke Abwesenheit jeglicher “Ränder” verstanden werden kann.
- Für $R \in \{D, N\}$ existiert ein (eindeutiger) Markoff-Prozess $(B_t^{(R)})$ auf $M \cup \{\infty\}$, mit der Eigenschaft, dass für alle messbaren $A \subseteq M$, alle $t > 0$ und μ-fast alle $x \in M$ gilt

$$\mathbb{P}(B_t^{(R)} \in A \mid B_0^{(R)} = x) = e^{-tL^{(R)}} 1_A(x).$$

Der Prozess $(B_t^{(D)})$ heißt *minimale brownsche Bewegung* und der Prozess $(B_t^{(N)})$ heißt *reflektierte brownsche Bewegung*.

Zeichnung

Wir untersuchen nun Eigenschaften von $\mathcal{E}^{(D)}, \mathcal{E}^{(N)}$ und $\mathcal{L}$, wobei wir besonderen Wert auf den Einfluss der Geometrie der Mannigfaltigkeit legen. Konkret beschäftigen wir uns mit den folgenden Fragen.

- Hat $\mathcal{L}$ mehr als eine selbstadjungierte Fortsetzung bzw. wann gilt $L^{(D)} = L^{(N)}$?
- Wo liegt das Spektrum von $L^{(D)}$ bzw. $L^{(N)}$ und welche Art hat es?
- Ist $\mathcal{E}^{(D)}$ stochastisch vollständig, d.h. gilt $e^{-tL^{(D)}}1 = 1$ (bleibt $(B_t^{(D)})$ für alle Zeiten auf M)?

- Ist $\mathcal{E}^{(D)}$ rekurrent oder transient (kehrt $(B_t^{(D)})$ unendlich oft in jede beschränkte offene Teilmenge zurück oder nicht)?

Ende 13. Vorlesung

5. Lokale Regularitätstheorie

Dieses Kapitel behandelt lokale Glattheitsaussagen schwacher Lösungen zu linearen Differentialgleichungen der Form

$$Pu = f$$

auf einer Mannigfaltigkeit. Dabei ist P entweder der (gewichtete) distributionelle Laplace-Beltrami-Operator oder der Wärmeoperator (s.u). Wir zeigen (bzw. skizzieren), dass gewisse schwache Lösungen zu guten rechten Seiten bereits starke Glattheitseigenschaften haben.

Theorem (Δ_μ ist hypoelliptisch auf $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$)**.** *Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit und $\alpha \in \mathbb{R}$. Ist $f \in C^\infty(M)$ und $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ mit*

$$\Delta_\mu u + \alpha u = f,$$

so gilt $u \in C^\infty(M)$ (genauer: u hat eine glatte Version).

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir ein paar klassische Resultate über Sobolev-Räume im $\mathbb{R}^n$.

Im folgenden ist Ω stets eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit dem Lebesgue-Maß. Mit ∂_i bezeichnen wir die distributionellen partiellen Ableitungen auf Ω und mit ∂^α deren Hintereinanderausführung bezüglich eines Multiindex α. Der lokale Sobolev-Räume k-ter Ordnung ist definiert durch

$$W^k_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \mid \partial^\alpha f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k\}.$$

Der folgende Satz behandelt Glattheitseigenschaften von Funktionen in lokalen Sobolev-Räumen, siehe [**2**, Theorem 6.1].

Proposition (Sobolevscher Einbettungssatz)**.** *Es sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Für*

$$k > m + \frac{n}{2}$$

gilt $W^k_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subseteq C^m(\Omega)$ (genauer: jede Funktion aus $W^k_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ hat eine Version in $C^m(\Omega)$).

Bemerkung.

- Der Sobolevsche Einbettungssatz sagt, dass die Glattheit einer Funktion aus der Existenz (in L^2_{loc}) genügend vieler schwacher Ableitungen folgt.

- Tatsächlich gibt der Sobolevsche Einbettungssatz auch noch Abschätzungen für die Normen der Funktionen in den entsprechenden Funktionenräumen. Wir benötigen jedoch nur die Glattheitsaussage.

Für $1 \leq i, j \leq n$ sei $a^{ij} \in C^\infty(\Omega)$. Die Matrixwertige Funktion (a^{ij}) heißt *elliptisch*, falls sie symmetrisch in i, j ist und es zu jedem Punkt $x \in \Omega$ eine Konstante $c(x) > 0$ gibt, mit

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c(x)|\xi|^2 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Ein einfaches Beispiel ist $a^{ij}(x) = \delta^{ij}$. In diesem Fall kann $c \equiv 1$ gewählt werden. Zu einer gegebenen glatten elliptischen Matrixfunktion (a^{ij}) assoziieren wir den *elliptischen Operator* $A : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ durch

$$\langle Au, \varphi\rangle := \langle u, \partial_j(a^{ij}\partial_i\varphi)\rangle.$$

Nach Definition der distributionellen partiellen Ableitungen gilt also

$$Au = \partial_i(a^{ij}\partial_j u).$$

Der folgende Satz ist enthalten in [**2**, Theorem 6.9].

Proposition (Gårdings Satz)**.** *Es sei A ein elliptischer Operator wie oben. Für alle $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $Au \in W^m_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gilt $u \in W^{m+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Bemerkung.

- Gårdings Satz ist auch als Gårdings Ungleichung bekannt, da er eigentlich explizite Abschätzungen für die entsprechenden (lokalen) Normen liefert. Auch hier reicht uns aber die Glattheitsaussage.
- Wir skizzieren hier kurz die Aussage des Satzes für $m = 0$. Es gilt $u \in W^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ genau dann, wenn für jede Kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ gilt

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} \int_K |\partial^\alpha u|^2 \,\mathrm{d}\lambda < \infty.$$

Es ist $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $Au \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) = W^0_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ genau dann, wenn für jede Kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ gilt

$$\int_K |u|^2 \,\mathrm{d}\lambda + \int_K \left|\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a^{ij}\partial_j u)\right|^2 \mathrm{d}\lambda < \infty.$$

Unterschiede diskutieren

Als Folgerung aus beiden Sätzen erhalten wir das folgende Hauptlemma für den Beweis der Hypoelliptizität von Δ_μ.

Lemma. *Es sei A ein elliptischer Operator und $b : \Omega \to (0, \infty)$ eine glatte Funktion. Ist $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $(bA)^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Beweis. Wir beweisen $u \in W^{2k}_{\text{loc}}(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, was mit dem Sobolevschen Einbettungssatz $u \in C^\infty(\Omega)$ liefert.

Wir benutzen folgende Beobachtung, welche aus der Produktregel folgt: Für alle $k \in \mathbb{N}$, $\rho \in C^\infty(\Omega)$ und $u \in W^k_{\text{loc}}(\Omega)$ gilt $\rho u \in W^k_{\text{loc}}(\Omega)$.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Voraussetzung gilt $(bA)^k u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Da b glatt und strikt positiv ist, erhalten wir

$$A(bA)^{k-1}u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega).$$

Aus Gårdings Satz folgt $(bA)^{k-1}u \in W^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Da b glatt und strikt positiv ist, gilt mit der Beobachtung von oben angewendet auf $\rho = b^{-1}$, dass

$$A(bA)^{k-2}u \in W^2_{\text{loc}}(\Omega).$$

Eine erneute Anwendung von Gårdings Satz liefert $(bA)^{k-2} \in W^4_{\text{loc}}(\Omega)$. Die Iteration dieses Arguments zeigt schließlich $u \in W^{2k}_{\text{loc}}(\Omega)$. □

Ende 14. Vorlesung

Beweis. Δ_μ ist hypoelliptisch auf $L^2_{\text{loc}}(\mu)$: Es seien $f \in C^\infty(M)$ und $u \in L^2_{\text{loc}}(\mu)$ mit

$$\Delta_\mu u + \alpha u = f$$

gegeben.

Sei (U, φ) eine Karte mit lokalen Koordinatenfunktionen (x^i). In diesen gilt die folgende distributionelle Gleichung für die Einschränkung von u auf U:

$$\Delta_\mu u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} u \right),$$

wobei $\rho = \Upsilon \sqrt{\det(g_{ij})}$ (Übung).

Wir setzen $\bar{\rho} := \rho \circ \varphi^{-1}$, $\bar{g}^{ij} := g^{ij} \circ \varphi^{-1}$ und $\bar{u} := u \circ \varphi^{-1}$. Sei A der elliptische Operator zur glatten elliptischen Matrixfunktion $(\rho \bar{g}^{ij})$. Wir haben bereits beim Beweis der Aussage $W^1_c(M, \mu) \subseteq W^1_0(M, \mu)$ beobachtet, dass

$$\frac{\partial}{\partial x^i} u = (\partial_i \bar{u}) \circ \varphi$$

im Sinne von L^2_{loc}-Funktionen, aufgefasst als Distributionen. Es folgt also

$$(A\bar{u}) \circ \varphi = \rho \Delta_\mu u.$$

Wir beweisen nun $\bar{u} \in L^2_{\text{loc}}(\varphi(U))$ und $(\bar{\rho}^{-1}A)^k \bar{u} \in L^2_{\text{loc}}(\varphi(U))$ für alle $k \in \mathbb{N}$, was nach dem vorigen Lemma die gewünschte Aussage liefert. Die Aussage über $\bar{u}$ folgt aus $u \in L^2_{\text{loc}}(\mu)$ und der Gleichung

$$\int_V |u|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_{\varphi(V)} |\bar{u}|^2 \rho \,\mathrm{d}\lambda,$$

welche für alle messbaren $V \subseteq U$ gilt. Die Aussage über $(\bar{\rho}^{-1}A)^k \bar{u}$ beweisen wir mittels Induktion. Aufgrund der Gleichung $(\bar{\rho}^{-1}A\bar{u}) \circ \varphi =$

$\Delta_\mu u$ und der Formel für die L^2-Normen, genügt es $(\Delta_\mu)^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}(U,\mu)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ zu zeigen.

Für $k = 1$ folgt die Aussage aus der Gleichung

$$\Delta_\mu u = f - \alpha u,$$

und den Eigenschaften von u und f. Ist $(\Delta_\mu)^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}(U,\mu)$, so erhalten wir

$$(\Delta_\mu)^{k+1} u = (\Delta_\mu)^k (f - \alpha u) = (\Delta_\mu)^k f - \alpha(\Delta_\mu)^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}(U,\mu).$$

Dies beendet den Beweis. □

Wir diskutieren nun ähnliche Aussagen für den Wärmeoperator. Dabei verzichten wir vollständig auf Beweise und verweisen auf [**2**, Kapitel 6.4 und Kapitel 7.1]. Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $T \in (0,\infty]$ sei $N := (0,T) \times M$ das riemannsche Produkt ausgestattet mit dem Produktmaß $\nu := \lambda \otimes \mu$, wobei λ das Lebesgue-Maß ist. Auf $\mathcal{D}'(N)$ definieren wir die Zeitableitung $\partial_t : \mathcal{D}'(N) \to \mathcal{D}'(N)$ durch

$$\langle \partial_t u, \varphi \rangle = -\langle u, \partial_t \varphi \rangle,$$

wobei ∂_t auf $\mathcal{D}(N)$ die übliche Ableitung nach der ersten Koordinate ist. Der gewichtete Laplace-Operator Δ_μ operiert auch auf $\mathcal{D}'(N)$ mittels

$$\langle \Delta_\mu u, \varphi \rangle = \langle u, \Delta_\mu \varphi \rangle,$$

wobei für $\varphi \in \mathcal{D}(N)$ die Funktion $\Delta_\mu \varphi$ gegeben ist durch

$$(\Delta_\mu \varphi)(x,t) := (\Delta_\mu \varphi(t,\cdot))(x).$$

Kurz gesagt operiert Δ_μ nur auf der Raum-Komponente und ∂_t nur auf der Zeit-Komponente. Der Operator $\mathcal{P} := \partial_t - \Delta_\mu$ heißt *Wärmeoperator.*

Definition (Lösungen zur Wärmeleitungsgleichung)**.** Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit, $T \in (0,\infty]$, $N = (0,T) \times M$ und $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Eine Funktion $u \in C^\infty(N)$ heißt *Lösung zur Wärmeleitungsgleichung (auf* $(0,T)$*) mit Anfangswert* f, falls

$$\partial_t u - \Delta_\mu u = \mathcal{P} u = 0$$

und

$$u(t,\cdot) \to f \text{ in } L^1_{\mathrm{loc}}(\mu), \text{ für } t \to 0+.$$

Bemerkung. Ist f die Dichte einer Wärmeverteilung auf M und u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert f, so ist $u(t,\cdot)$ die Dichte der Wärmeverteilung auf M zur Zeit t. Diese Lösungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Wir lernen später geometrische Kriterien kennen, die die Eindeutigkeit sicherstellen.

Der Wärmeoperator ist in lokalen Koordinaten nicht elliptisch, deshalb ist die Regularitätstheorie von oben nicht direkt auf ihn anwendbar. Trotzdem gilt folgender Satz, siehe [**2**, Theorem 7.4].

Theorem (Hypoelliptizität von $\mathcal{P}$)**.** *Es sei* $(M, \mathbf{g}, \mu)$ *eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit,* $T \in (0, \infty]$ *und* $N := (0, T) \times M$*. Gilt* $u \in \mathcal{D}'(N)$ *und* $\partial_t u - \Delta_\mu u \in C^\infty(N)$*, so folgt* $u \in C^\infty(N)$*.*

Das vorherige Theorem zeigt, dass distributionelle Lösungen zur Wärmeleitungsgleichung automatisch Lösungen im klassischen Sinne sind. Ein gutes Hilfsmittel um distributionelle und damit klassische Lösungen zur Wärmeleitungsgleichung zu erhalten, sind die Halbgruppen der oben definierten Dirichlet-Formen.

Theorem (Lösungen zur Wärmeleitungsgleichung)**.** *Es sei* $(M, \mathbf{g}, \mu)$ *eine gewichtete Mannigfaltigkeit,* $R \in \{N, D\}$ *und* $(T_t^{(R)})$ *die zur Dirichletform* $\mathcal{E}^{(R)}$ *gehörige Halbgruppe. Sei weiterhin* $1 \leq p \leq \infty$ *und* $f \in L^p(\mu)$*. Es gibt eine eindeutige Funktion* $u \in C^\infty((0, \infty) \times M)$*, sodass für alle* $t > 0$

$$u(t, \cdot) = T_t^{(R)} f \text{ in } L^p(\mu).$$

Diese Funktion ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert f*.*

Beweis. Wie oben setzen wir $N = (0, \infty) \times M$ und $\nu = \lambda \otimes \mu$. Wir beweisen die Aussage zunächst für $f \in L^2(\mu)$, die allgemeinere Version folgt dann durch ein Approximationsargument.

Sei also $f \in L^2(\mu)$ und $\tilde{u} : (0, \infty) \to L^2(\mu)$, $\tilde{u}(t) := T_t^{(R)} f$. Wegen des Zusammenhangs der Halbgruppe und des zur Dirichlet-Form $\mathcal{E}^{(R)}$ assoziierten Operators, folgt

$$(\tilde{\partial}_t + L^{(R)})\tilde{u} = 0,$$

wobei für $s > 0$ die Zeitableitung definiert ist durch

$$(\tilde{\partial}_t \tilde{u})(s) = \lim_{h \to 0} h^{-1}(\tilde{u}(s + h) - \tilde{u}(s)) \text{ in } L^2(\mu).$$

Wegen der Stetigkeit und der Separabilität von $L^2(\mu)$ gibt es eine messbare Funktion $u : (0, \infty) \times M \to \mathbb{R}$, mit $u \in L^1_{\text{loc}}(N, \nu)$, sodass

$$u(t, \cdot) = \tilde{u}(t) \text{ für } \lambda\text{-fast alle } t > 0 \text{ (s.u.).}$$

Für $\varphi \in \mathcal{D}(N)$ liefern die üblichen Integralsätze

$$\begin{aligned}\langle u, \partial_t \varphi\rangle &= \int_M \int_0^\infty u(s,x)(\partial_t\varphi)(s,x)\,\mathrm{d}\lambda(s)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \lim_{h\to 0} h^{-1} \int_M \int_0^\infty u(s,x)(\varphi(s+h,x) - \varphi(s,x))\,\mathrm{d}\lambda(s)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \lim_{h\to 0} h^{-1} \int_M \int_0^\infty (u(s-h,x) - u(s,x))\varphi(s,x)\,\mathrm{d}\lambda(s)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \lim_{h\to 0} h^{-1} \int_0^\infty \int_M (\tilde{u}(s-h)(x) - \tilde{u}(s)(x))\varphi(s,x)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\lambda(s)\\ &= \int_0^\infty \lim_{h\to 0} h^{-1}\langle \tilde{u}(s-h) - \tilde{u}(s), \varphi(s,\cdot)\rangle_2\,\mathrm{d}\lambda(s)\\ &= \int_0^\infty \langle L^{(R)}\tilde{u}(s), \varphi(s,\cdot)\rangle_2\,\mathrm{d}\lambda(s).\end{aligned}$$

Wir haben oben gesehen, dass $L^{(R)}$ eine Einschränkung von $-\Delta_\mu$ ist. Daher gilt $L^{(R)}\tilde{u}(s) = -\Delta_\mu \tilde{u}(s)$. Da $\tilde{u}(s) = u(s,\cdot)$ für fast alle $s > 0$, folgt aus dieser Rechnung

$$\langle \partial_t u, \varphi\rangle = -\langle u, \partial_t\varphi\rangle = \langle \Delta_\mu u, \varphi\rangle.$$

Demnach ist u eine distributionelle Lösung zur Wärmeleitungsgleichung, hat also eine glatte Modifikation, welche wir ebenfalls mit u bezeichnen. Die Modifikation erfüllt $u(t,\cdot) = \tilde{u}(t)$ allerdings nur für λ-fast alle $t > 0$. Dass diese Gleichung trotzdem für alle $t > 0$ gilt, folgt aus den Stetigkeitseigenschaften von u und $\tilde{u}$. Die Aussage über den Anfangswert folgt ebenfalls aus der starken Stetigkeit der Halbgruppe, welche sogar

$$u(t,\cdot) = \tilde{u}(t) \to f \text{ für } t \to 0+ \text{ in } L^2(\mu)$$

impliziert.

Ende 15. Vorlesung

Sei nun $1 \le p \le \infty$ und $f \in L^p(\mu)$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $f \ge 0$. Sei (f_n) eine Folge in $L^2(\mu)_+$, mit $f_n \nearrow f$ μ-fast sicher. Aus der Definition der Halbgruppe auf L^p folgt

$$T_t^{(R)} f = \lim_{n\to\infty} T_t^{(R)} f_n \; \mu\text{-fast sicher.}$$

Aufgrund der Positivitätserhaltung der Halbgruppe ist $(T_t^{(R)} f_n)$ monoton wachsend und durch $T_t^{(R)} f$ beschränkt (hier ist die Monotonie und Beschränktheit im L^p-Sinne gemeint).

Aus dem oben bereits Bewiesenen folgt, dass es $u_n \in C^\infty(N)$ gibt, mit $u_n(t,\cdot) = T_t^{(R)} f_n$ für alle $t > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, welche die Wärmeleitungsgleichung lösen. Aufgrund der Eigenschaften von $(T_t^{(R)} f_n)$ in L^p sind die glatten Funktionen u_n positiv und punktweise monoton in n. Wir definieren

$$u : (0,\infty) \times M \to [0,\infty],\ u(t,x) := \lim_{n\to\infty} u_n(t,x).$$

Als Grenzwert messbarer Funktionen ist u messbar und erfüllt

$$u(t,\cdot) = T_t^{(R)} f \text{ in } L^p(\mu) \text{ für alle } t > 0.$$

Wir zeigen nun $u \in L^1_{\text{loc}}(N,\nu)$. Sei dazu $0 < a < b$, $U \subseteq M$ offen und relativ kompakt, und $L := (a,b) \times U$. Es genügt zu zeigen, dass $1_L u \in L^1(\nu)$. Für $1 \leq p < \infty$ liefert die Hölder-Ungleichung

$$\int_a^b \int_U |u(x,t)| \,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\lambda(t) \leq \left(\int_a^b \int_U |u(x,t)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\lambda(t)\right)^{1/p} \nu(L)^{1/q},$$

wobei q der zu p duale Exponent ist. Da $\nu(L) = (b-a)\mu(U) < \infty$ und

$$\int_U |u(x,t)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_U |T_t^{(R)} f|^p \,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p^p < \infty,$$

erhalten wir $u \in L^1_{\text{loc}}(\nu)$. Der Fall $p = \infty$ lässt sich ähnlich behandeln.

Der Satz über dominierte Konvergenz zeigt, dass $u_n \to u$ in $L^1_{\text{loc}}(N,\nu)$. Ferner sind die distributionelle Ableitung ∂_t und der distributionelle Operator Δ_μ stetig auf $\mathcal{D}'(N)$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(N)$ erhalten wir

$$\langle \partial_t u, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \partial_t u_n, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Delta_\mu u_n, \varphi\rangle = \langle \Delta_\mu u, \varphi\rangle.$$

Demnach ist u eine distributionelle Lösung zur Wärmeleitungsgleichung und hat einen glatten Repräsentanten, den wir ebenfalls mit u bezeichnen. Wieder gilt die Gleichung

$$u(t,\cdot) = T_t^{(R)} f \text{ in } L^p(\mu)$$

zunächst nur für λ-fast alle $t > 0$. Wie oben implizieren die Stetigkeitseigenschaften von u und von $t \mapsto T_t^{(R)} f$ die gewünschte Gleichheit für alle $t > 0$.

Die Aussage über die Anfangswerte von u folgt nun aus der starken, bzw. der schwach-*-Stetigkeit, von $t \mapsto T_t^{(R)} f$. □

Bemerkung.

- Der Beweis des Satzes zeigt, dass man mithilfe der Theorie der Dirichlet-Formen (und damit Funktionalanalysis) gut distributionelle (schwache) Lösungen erzeugen kann. Um starke Lösungen zu erhalten, muss man zusätzlich lokale Regularitätstheorie bemühen.
- Die einzige technische Schwierigkeit im Beweis war sicherzustellen, dass es eine bezüglich der Produkt-σ-Algebra messbare Version von $(t,x) \mapsto T_t^{(R)} f(x)$ gibt. Das Problem hierbei liegt daran, dass $T_t^{(R)} f(x)$ nur für fast alle x definiert und die Indexmenge $(0,\infty)$ überabzählbar ist. Die Details erklären wir im folgenden Lemma.

Im Beweis oben haben wir das folgende technische Lemma aus der Maßtheorie verwendet.

Lemma. *Es sei* $(M, \mathbf{g}, \mu)$ *eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit,* $T \in (0, \infty]$ *und* $\tilde{u} : (0, T) \to L^2(\mu)$ *stetig. Es existiert eine messbare Funktion* $u : (0, T) \times M \to \mathbb{R}$, *mit* $u(t, \cdot) = \tilde{u}(t)$ *in* $L^2(\mu)$ *für* λ*-fast alle* $0 < t < T$ *und es gilt* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(N, \nu)$.

Beweis. Da die Borel-σ-Algebra von M abzählbar erzeugt ist, ist der Raum $L^2(\mu)$-separabel. Es sei $\{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Orthogonalbasis von $L^2(\mu)$. Ferner seien $I_n \subseteq (0, T)$ aufsteigende kompakte Intervalle, mit $\bigcup_n I_n = (0, T)$. Für $k, n \in \mathbb{N}$ sind die Abbildungen

$$g_{n,k} : (0, T) \times M \to \mathbb{R},\ (x, t) \mapsto \langle \tilde{u}(t), f_k \rangle 1_{I_n}(t) f_k(x)$$

als Produkt messbarer Funktionen messbar. Wir betrachten

$$u_{n,l} := \sum_{k=1}^{l} g_{n,k}.$$

Aufgrund der Parsevalschen Gleichung in $L^2(\mu)$ und der Stetigkeit von $\tilde{u}$, erfüllen diese

$$\int_0^T \int_M |u_{n,l}|^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\lambda \le \int_0^T \|\tilde{u}(t) 1_{I_n}(t)\|^2 \,\mathrm{d}\lambda(t) < \infty,$$

gleichmäßig in l. Deshalb existiert der Grenzwert $u_n := \lim_{l\to\infty} u_{n,l}$ in $L^2((0, T) \times M, \nu)$. Für $n \ge m$ unterscheiden sich u_n und u_m nur auf $I_n \setminus I_m$ (es gilt $u_m = u_n 1_{I_n \times M}$), weswegen der Grenzwert $u := \lim_{n\to\infty} u_n$ in $L^1_{\mathrm{loc}}((0, T) \times M, \nu)$ existiert und $u 1_{I_n \times M} = u_n$ erfüllt. Mit der Parsevalschen Identität und den Eigenschaften von u folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|u(t, \cdot) - \tilde{u}(t)\|^2 \,\mathrm{d}\lambda(t) &= \lim_{n\to\infty} \int_{I_n} \|u(t, \cdot) - \tilde{u}(t)\|^2 \,\mathrm{d}\lambda(t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{I_n} \|u_n(t, \cdot) - \tilde{u}(t)\|^2 \,\mathrm{d}\lambda(t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{l\to\infty} \int_{I_n} \|u_{n,l}(t, \cdot) - \tilde{u}(t)\|^2 \,\mathrm{d}\lambda(t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{l\to\infty} \int_{I_n} \sum_{k=l+1}^{\infty} |\langle \tilde{u}(t), f_k \rangle_2|^2 \,\mathrm{d}\lambda(t).
\end{aligned}$$

Die Stetigkeit von $\tilde{u}$ impliziert

$$\sup_{t\in I_n} \sum_{k=l+1}^{\infty} |\langle \tilde{u}(t), f_k \rangle_2|^2 \le \sup_{t\in I_n} \|\tilde{u}(t)\|_2^2 < \infty \text{ für alle } l \in \mathbb{N}.$$

Deshalb liefert der Satz von Lebesgue

$$\lim_{l\to\infty} \int_{I_n} \sum_{k=l+1}^{\infty} |\langle \tilde{u}(t), f_k \rangle_2|^2 \,\mathrm{d}\lambda(t) = 0,$$

und die Aussage $u(t, \cdot) = \tilde{u}(t)$ für fast alle t ist bewiesen. $\square$

KAPITEL 3

Der Satz von Rademacher und wesentliche Selbstadjungiertheit

In diesem Kapitel lernen wir ein Kriterium kennen, welches sicher stellt, dass $L^{(D)}$ und $L^{(N)}$ (und alle anderen selbstadjungierten Erweiterungen von $\mathcal{L}$) übereinstimmen. Als technisches Hilfsmittel benötigen wir den Satz von Rademacher. Er charakterisiert Lipschitz-Funktionen durch die Beschränktheit des distributionellen Gradienten.

Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine Mannigfaltigkeit und ρ die zugehörige geodätische Metrik. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz - Funktion* mit *Lipschitz - Konstante* K, falls

$$|f(x) - f(y)| \leq K\rho(x, y) \text{ für alle } x, y \in M.$$

Die Menge aller Lipschitz-Funktionen bezüglich ρ bezeichnen wir mit $\mathrm{Lip}(M)$. Die *Lipschitz-Halbnorm* (die kleinste Lipschitz-Konstante) einer Funktion $f \in \mathrm{Lip}(M)$ ist definiert durch

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := \sup_{x,y\in M,\, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x, y)}.$$

Zum Aufwärmen zeigen wir, dass glatte Funktionen mit beschränktem Gradient Lipschitz-Funktionen sind.

Proposition. *Es sei* $(M, \mathbf{g})$ *eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit und* $f \in C^\infty(M)$ *mit* $|\nabla_{\mathbf{g}} f|_{\mathbf{g}} \in C_b^\infty(M)$*. Dann gilt* $f \in \mathrm{Lip}(M)$ *und*

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq \sup_M |\nabla_{\mathbf{g}} f|_{\mathbf{g}}.$$

Beweis. Es sei

$$C := \sup_M |\nabla_{\mathbf{g}} f|_{\mathbf{g}}.$$

Zu $x, y \in M$ wählen wir eine Kurve $\gamma : [a, b] \to M$, mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Nach dem HDI und der Definition von $\nabla_{\mathbf{g}}$ gilt

$$f(x) - f(y) = \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b df(\dot\gamma)\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \langle \nabla_{\mathbf{g}} f, \dot\gamma\rangle_{\mathbf{g}}\,\mathrm{d}\lambda,$$

weswegen

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_a^b |\nabla_{\mathbf{g}} f|_{\mathbf{g}} |\dot\gamma|_{\mathbf{g}}\,\mathrm{d}\lambda \leq C \int_a^b |\dot\gamma|_{\mathbf{g}}\,\mathrm{d}\lambda = CL(\gamma).$$

Da $\rho(x,y)$ das Infimum über die Längen aller solcher Kurven ist, folgt die gewünschte Aussage. $\square$

Der Satz von Rademacher liefert eine Umkehrung von dieser Proposition für allgemeine Lipschitz-Funktionen. Dabei kann die Differenzierbarkeit nur im schwachen Sinne gewährleistet werden, da Lipschitz-Funktionen im Allgemeinen nicht differenzierbar sein müssen (betrachte z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$).

Theorem (Satz von Rademacher)**.** *Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine gewichtete riemannsche n-Mannigfaltigkeit. Für alle $f \in \mathrm{Lip}(M)$ gilt $\nabla_{\mathbf{g}} f \in \vec{L}^\infty(\mu)$ und*

$$\|\nabla_{\mathbf{g}} f\|_\infty \leq \sqrt{n}\|f\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Bemerkung. In der Abschätzung ist $\sqrt{n}$ nicht die optimale Konstante, die optimale Konstante ist 1. Für unsere Zwecke reicht aber diese etwas schwächere Aussage.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir zwei Hilfsaussagen. Wie oben bezeichnen wir mit ∂_i die distributionellen partiellen Ableitungen im $\mathbb{R}^n$ und statten offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgue-Maß aus.

Lemma. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine K-Lipschitz-Funktion bezüglich der euklidischen Metrik. Für $i = 1, \dots, n$ gilt $\partial_i f \in L^\infty(\Omega)$ und*

$$\sum_{i=1}^n (\partial_i f)^2 \leq nK^2 \ \lambda\text{-fast überall.}$$

Beweis. Es sei $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ und $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i-te Einheitsvektor. Mithilfe der üblichen Integralsätze berechnen wir

$$\begin{aligned}
\langle f, \partial_i \psi\rangle &= \int_\Omega f \partial_i \psi \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_\Omega f \partial_i \psi \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_\Omega f(x) \lim_{h\to 0} h^{-1}(\psi(x+he_i) - \psi(x)) \,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \lim_{h\to 0} h^{-1} \int_\Omega f(x)(\psi(x+he_i) - \psi(x)) \,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \lim_{h\to 0} h^{-1} \int_\Omega (f(x-he_i) - f(x))\psi(x) \,\mathrm{d}\lambda(x).
\end{aligned}$$

Aus der K-Lipschitz-Stetigkeit von f folgt

$$|\langle \partial_i f, \psi\rangle| = |\langle f, \partial_i \psi\rangle| \leq K\|\psi\|_1,$$

weswegen sich $\langle \partial_i f, \cdot \rangle$ zu einem stetigen Funktional auf $L^1(\Omega)$ fortsetzen lässt. Der Dualraum von $L^1(\Omega)$ ist isomorph zu $L^\infty(\Omega)$ und der Isomorphismus ist gegeben durch $L^\infty(\Omega) \to L^1(\Omega)'$, $h \mapsto L_h$, mit

$$L_h(\psi) = \int_\Omega h\psi \, \mathrm{d}\lambda.$$

Deshalb existiert $h \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$\langle \partial_i f, \psi \rangle = \int_\Omega h\psi \, \mathrm{d}\lambda \text{ für alle } \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Dies bedeutet aber gerade $\partial_i f = h$ im Sinne von Distributionen und $|\partial_i f| \leq K$. Das Summieren dieser Ungleichung beendet den Beweis. □

Lemma. *Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \in M$ existiert eine Karte (U, φ) mit lokalen Koordinaten (x^i), sodass $p \in U$ und*

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{falls } i = j, \\ 0 & \textit{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Beweis. Bevor wir das Lemma beweisen, erinnern wir an das Transformationsverhalten der riemannschen Metrik beim Koordinatenwechsel. Es seien (U, φ) bzw. (V, ψ) Karten mit lokalen Koordinatenfunktionen (x^i) bzw. (y^j). Ferner sei $J(q) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$ die lineare Abbildung, die von der Matrix

$$J_i^k(q) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(q),$$

wobei k der Zeilenindex und i der Spaltenindex ist, bezüglich den Standardkoordinaten induziert wird. Weiterhin bezeichnen wir mit g^φ bzw. g^ψ die Koordinatendarstellungen der Metrik bezüglich der Karten φ bzw. ψ. Wir haben oben gesehen, dass

$$g^\varphi = J^T g^\psi J.$$

Mithilfe dieser Formel können wir nun den Beweis führen.

Sei (U, φ) eine beliebige Karte mit $p \in U$. Da (g^φ) positiv definit ist, folgt aus dem Trägheitssatz von Silvester (aus der linearen Algebra), dass es eine invertierbare Matrix A gibt, sodass

$$A^T g^\varphi(p) A = \mathrm{Id}.$$

Wir definieren $\psi : U \to \mathbb{R}^n$, $\psi(x) = A^{-1}\varphi(x)$. Für diese Wahl der Karten gilt $J(q) = A^{-1}$ für alle $q \in U$, da

$$\frac{\partial y^k}{\partial x^i}(q) = \partial_i(\psi \circ \varphi^{-1})^k(\varphi(q)) = \partial_i(A^{-1}(\cdot))^k = (A^{-1})_i^k.$$

Wegen der Erinnerung oben folgt

$$(A^{-1})^T g^\psi(p) A^{-1} = g^\varphi(p),$$

also

$$g^{\psi}(p) = A^T g^{\varphi}(p) A = \mathrm{Id}.$$

Dies beendet den Beweis. $\square$

Ende 16. Vorlesung

Beweis. Satz von Rademacher: Aus dem vorigen Lemma und der Stetigkeit der Metrik folgt, dass es zu jedem $p \in M$ und $D > 1$ eine Karte (U, φ) mit lokalen Koordinatenfunktionen (x^i) und $p \in U$ gibt, sodass für alle $x \in U$, $\xi \in T_xM$ und $\eta \in T_xM^*$ gilt

$$g_{ij}(x)\xi^i\xi^j \leq D^2((\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^n)^2)$$

und

$$g^{ij}(x)\eta_i\eta_j \leq D^2((\eta_1)^2 + \ldots + (\eta_n))^2.$$

Durch weiteres verkleinern von U können wir erreichen, dass $\varphi(U)$ eine Kugel mit Mittelpunkt $\varphi(p)$ ist. Insbesondere gehört für alle $x, y \in U$ die gerade zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ zu U, weswegen

$$\rho(x, y) \leq D|\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Zeichnung

(Vergleiche den Beweis der Äquivalenz der Topologien von M und der von ρ erzeugten Topologie).

Sei nun $f : M \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-Funktion mit Lipschitz-Konstante K, $D > 1$ und (U, φ) eine Karte wie oben. Wir setzen $\bar{f} := f \circ \varphi^{-1}$. Für $\bar{x}, \bar{y} \in \varphi(U)$ gilt

$$|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})| \leq K\rho(\varphi^{-1}(\bar{x}), \varphi^{-1}(\bar{y})) \leq DK|\bar{x} - \bar{y}|,$$

also ist $\bar{f}$ eine DK-Lipschitz-Funktion auf $\varphi(U)$. Aus dem Lemma über Lipschitz-Funktionen im $\mathbb{R}^n$ folgt nun $\partial_i\bar{f} \in L^\infty(\varphi(U))$ und

$$\sum_{i=1}^n (\partial_i\bar{f})^2 \leq nD^2K^2 \ \lambda\text{-fast überall auf } \varphi(U).$$

Die Identität $(\partial_i\bar{f}) \circ \varphi = \frac{\partial}{\partial x^i} f$ (s.o.) impliziert

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right)^2 \leq nD^2K^2 \ \mu\text{-fast überall auf } U.$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial x^i} f \in L^2_{\mathrm{loc}}(U)$ für alle i erhalten wir $\nabla_{\mathbf{g}} f \in \vec{L}^2_{\mathrm{loc}}(U)$ und

$$\nabla_{\mathbf{g}} f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}(s.o).$$

Daraus und aus der Wahl der Karte folgt

$$|\nabla_{\mathbf{g}} f|^2_{\mathbf{g}} = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} \leq D^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right)^2 \leq nD^2D^2K^2$$

μ-fast überall auf U. Da M von abzählbar vielen solchen Karten überdeckt wird, erhalten wir schließlich

$$\|\nabla_{\mathbf{g}} f\|_\infty \leq \sqrt{n}D^2K.$$

Weil $D > 1$ beliebig war, folgt die gewünschte Aussage. $\square$

Eine für uns sehr wichtige Folgerung aus dem Satz von Rademacher ist die folgende Aussage über Lipschitz-Funktionen mit kompaktem Träger, deren Gesamtheit wir mit $\mathrm{Lip}_c(M)$ bezeichnen.

Proposition. *Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gilt*

$$C_c^\infty(M) \subseteq \mathrm{Lip}_c(M) \subseteq W_0^1(M, \mu).$$

Beweis. Es sei $f \in \mathrm{Lip}_c(M)$. Da f kompakten Träger hat und stetig ist, gilt $f \in L^2(\mu)$. Als Distribution hat $\nabla_{\mathbf{g}} f$ auch kompakten Träger und der Satz von Rademacher zeigt $|\nabla_{\mathbf{g}} f|_{\mathbf{g}} \in L^\infty(\mu)$. Wir erhalten $|\nabla_{\mathbf{g}} f|_{\mathbf{g}} \in L^2(\mu)$, also $f \in W^1(M, \mu)$. Wir haben oben gezeigt, dass W^1-Funktionen mit kompaktem Träger zu W_0^1 gehören. Glatte Funktionen mit kompaktem Träger haben beschränkte Gradienten und sind deshalb Lipschitz-Stetig (s.o.). $\square$

Der Satz von Rademacher und seine Folgerungen erlauben es uns nun eine ganze Fülle von globalen Sätzen über Lösungen zur Laplace - Gleichung und zur Wärmeleitungsgleichung zu beweisen.

Theorem (L^2-Liouville-Theorem)**.** *Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit und $\lambda \geq 0$. Alle $u \in L^2(\mu)$ mit*

$$\Delta_\mu u = \lambda u$$

sind konstant. Falls $\lambda > 0$, gilt sogar $u = 0$.

Beweis. Sei $\lambda \geq 0$ und $u \in L^2(\mu)$ mit $\Delta_\mu u = \lambda u$. Aus der lokalen Regularitätstheorie folgt $u \in C^\infty(M)$. Wir zeigen zunächst, dass für alle $f \in \mathrm{Lip}_c(M)$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\int_M |\nabla_{\mathbf{g}} u|_{\mathbf{g}}^2 f^2 \,\mathrm{d}\mu \leq 4 \int_M |\nabla_{\mathbf{g}} f|_{\mathbf{g}}^2 u^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Sei dazu $f \in \mathrm{Lip}_c(M)$ und Ω eine relativkompakte Umgebung von $\mathrm{supp}(f)$. Es gilt $uf^2 \in \mathrm{Lip}_c(M)$ (Übung). Da Einschränkungen von Lipschitz-Funktionen auch Lipschitz-Funktionen sind, folgt $uf^2|_\Omega \in \mathrm{Lip}_c(\Omega)$ und somit $uf^2|_\Omega \in W_0^1(\Omega, \mu)$. Deswegen existiert eine Folge $\psi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\psi_n \to uf^2|_\Omega$ in $W^1(\Omega, \mu)$. Da u glatt ist, gilt

$\nabla_{\mathbf{g}} u \in \vec{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Insbesondere ist $\nabla_{\mathbf{g}} u|_\Omega \in \vec{L}^2(\Omega, \mu)$. Die (distributionelle) Definition von Δ_μ und die Produktregel für $\nabla_{\mathbf{g}}$ zeigt

$$\begin{aligned} 0 \geq -\lambda \int_M u^2 f^2 \,\mathrm{d}\mu &= \int_M u f^2 \Delta_\mu u \,\mathrm{d}\mu = -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi_n \Delta_\mu u \,\mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \langle \nabla_{\mathbf{g}} \psi_n, \nabla_{\mathbf{g}} u \rangle_{\mathbf{g}} \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \langle \nabla_{\mathbf{g}} (u f^2), \nabla_{\mathbf{g}} u \rangle_{\mathbf{g}} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_M |\nabla_{\mathbf{g}} u|^2_{\mathbf{g}} f^2 \,\mathrm{d}\mu + 2 \int_M \langle \nabla_{\mathbf{g}} f, \nabla_{\mathbf{g}} u \rangle_{\mathbf{g}} u f \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung, der elementaren Ungleichung $2ab \leq a^2/2 + 2b^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_{\mathbf{g}} u|^2_{\mathbf{g}} f^2 \,\mathrm{d}\mu &\leq -2 \int_\Omega \langle \nabla_{\mathbf{g}} f, \nabla_{\mathbf{g}} u \rangle_{\mathbf{g}} u f \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \frac{1}{2} \int_M |\nabla_{\mathbf{g}} u|^2_{\mathbf{g}} f^2 \,\mathrm{d}\mu + 2 \int_M |\nabla_{\mathbf{g}} f|^2_{\mathbf{g}} u^2 \,\mathrm{d}\mu, \end{aligned}$$

weswegen

$$\int_M |\nabla_{\mathbf{g}} u|^2_{\mathbf{g}} f^2 \,\mathrm{d}\mu \leq 4 \int_M |\nabla_{\mathbf{g}} f|^2_{\mathbf{g}} u^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Sei nun $R > 0$, $o \in M$ und $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x) = (R - \rho(x, o))_+$. Diese Funktion hat Lipschitz-Konstante 1 und ihr Träger ist in der abgeschlossenen Kugel $B^\rho_R(o)$ enthalten. Da (M, ρ) vollständig ist, ist $B^\rho_R(o)$ nach dem Satz von Hopf-Rinow kompakt. Wir können also die Ungleichung von oben auf f anwenden. Für $R > r > 0$ gilt $f \geq R - r$ auf $B^\rho_r(o)$. Weiterhin zeigt der Satz von Rademacher, dass $|\nabla_{\mathbf{g}} f|^2_{\mathbf{g}} \leq n$, wobei n die Dimension von M ist. Diese beiden Beobachtungen liefern zusammen mit der bereits bewiesenen Ungleichung, dass

$$\int_{B^\rho_r(o)} |\nabla_{\mathbf{g}} u|^2_{\mathbf{g}} \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{4n}{(R-r)^2} \int_M u^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Da $u \in L^2(\mu)$ können wir erst den Grenzwert $R \to \infty$ und dann den Grenzwert $r \to \infty$ bilden, und erhalten

$$\int_M |\nabla_{\mathbf{g}} u|^2_{\mathbf{g}} \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

was $\nabla_{\mathbf{g}} u = 0$ zeigt. Deshalb ist u 0-Lipschitz und somit konstant. Für $\lambda > 0$ ist $u = 0$ die einzige konstante Funktion, die die Gleichung $\Delta_\mu u = \lambda u$ löst. $\square$

Bemerkung.

- Der klassische Satz von Liouville sagt, dass eine beschränkte holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konstant ist. Da eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann holomorph ist, wenn sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial y} = -\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial x}$$

erfüllt, ist der Realteil einer holomorphen Funktion harmonisch (Übung), das heißt

$$\Delta \mathrm{Re} f = \frac{\partial^2 \mathrm{Re} f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{Re} f}{\partial y^2} = 0.$$

Ist umgekehrt eine harmonische Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben, so ist sie der Realteil einer holomorphen Funktion. In diesem Sinne macht der Satz von Liouville Aussagen über beschränkte harmonische Funktionen auf $\mathbb{R}^2$.

Tatsächlich kann man jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eindeutig zu einer meromorphen Funktion

$$\hat{f} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

fortsetzen. Dabei ist die Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine kompakte Mannigfaltigkeit, die von $\mathbb{C}$ in natürlicher Weise eine riemannsche Metrik erbt (!). Ist f beschränkt, so folgt aus der Laurent-Entwicklung um ∞, dass $\hat{f}(\infty) \in \mathbb{C}$, also $\hat{f}$ holomorph ist. Weiterhin kann man nachrechnen, dass in diesem Fall $\mathrm{Re}\hat{f}$ auch harmonisch ist (bezüglich des Laplace-Operators auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$). Da kompakte Mannigfaltigkeiten vollständig sind und beschränkte Funktionen auf kompakten riemannsche Mannigfaltigkeiten zu $L^2(\mathrm{vol})$ gehören, folgt aus unserem Satz, dass $\mathrm{Re} f$ konstant ist. Wegen der Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen muss dann auch $\mathrm{Im} f$ konstant sein. In diesem Sinne ist unser L^2-Liouville-Theorem eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Liouville.

- Die Forderung des Zusammenhangs der Mannigfaltigkeit ist unerheblich. Man kann alle Betrachtungen auch auf Zusammenhangskomponenten durchführen.

Ende 17.Vorlesung

- Ist $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit und $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ mit $\Delta_\mu u = 0$, so ist u bereits dann konstant, falls

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{\|u 1_{B_r^\rho(o)}\|_p^p} dr = \infty,$$

für ein $1 < p < \infty$, $o \in M$ und $r_0 > 0$. Dieses Resultat ist als Theorem von Karp'82 bekannt. Insbesondere gilt, dass jede harmonische L^p-Funktion konstant ist (L^p-Liouville-Theorem von Yau '76).

Theorem (Gaffney '51). *Sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist $\mathcal{L} = (-\Delta_\mu)|_{C_c^\infty(M)}$*

wesentlich selbstadjungiert (hat genau eine selbstadjungierte Fortsetzung). Diese selbstadjungierte Fortsetzung L erfüllt $\mathcal{L}^* = L$, das heißt

$$D(L) = D(\mathcal{L}^*) = \{f \in L^2(\mu) \mid \Delta_\mu f \in L^2(\mu)\}$$

und

$$Lf = -\Delta_\mu f.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst $L^{(D)} = \mathcal{L}^*$. Die Inklusion $L^{(D)} \subseteq \mathcal{L}^*$ wurde oben schon bewiesen, weswegen es genügt $D(\mathcal{L}^*) \subseteq D(L^{(D)})$ zu zeigen. Sei dazu $f \in D(\mathcal{L}^*)$, d.h. $f \in L^2(\mu)$ mit $\Delta_\mu f \in L^2(\mu)$, gegeben. Wir setzen

$$g := (L^{(D)} + 1)^{-1}(-\Delta_\mu + 1)f.$$

Da $L^{(D)}$ die Einschränkung von $-\Delta_\mu$ auf $D(L^{(D)})$ ist, und $g \in D(L^{(D)})$, folgt

$$(-\Delta_\mu + 1)g = (L^{(D)} + 1)g = (-\Delta_\mu + 1)f,$$

also

$$\Delta_\mu(g - f) = g - f.$$

Nach dem L^2-Liouville-Theorem erhalten wir $f = g \in D(L^{(D)})$.

Sei L eine beliebige selbstadjungierte Erweiterung von $\mathcal{L}$. Es gilt $L \subseteq \mathcal{L}*$ und nach dem oben gezeigten $L \subseteq L^{(D)}$. Damit gilt aber auch

$$L^{(D)} = (L^{(D)})^* \subseteq L^* = L,$$

und somit $L = L^{(D)}$. □

Bemerkung.

- Der Beweis des vorigen Satzes verwendet keinerlei Geometrie sondern gilt sehr allgemein. Sei A ein symmetrischer nichtnegativer dicht-definierter Operator A auf einem Hilbert-Raum. Gibt es ein $\lambda > 0$, sodass $\ker(A^* + \lambda) = \{0\}$, so ist A wesentlich selbstadjungiert und die eindeutige selbstadjungierte Fortsetzung ist gegeben durch A^*.
- Der Satz gilt für $\mathbb{R}^n$, kompakte Mannigfaltigkeiten und Modellmannigfaltigkeiten mit unendlichem Radius.
- Der Satz ist nur ein hinreichendes Kriterium für wesentliche Selbstadjungiertheit. Auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist Δ genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn $n \geq 4$.

Proposition. *Sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt $\mathcal{E}^{(D)} = \mathcal{E}^{(N)}$.*

Beweis. Nach dem vorigen Theorem gilt $L^{(D)} = L^{(N)}$. Da unterschiedliche Dirichlet-Formen unterschiedliche assoziierte selbstadjungierte Operatoren besitzen, folgt $\mathcal{E}^{(D)} = \mathcal{E}^{(N)}$. □

Bemerkung.

- Diese Proposition zusammen mit der Deutung von $\mathcal{E}^{(D)}$ und $\mathcal{E}^{(N)}$ sagt, dass es nur eine Brownsche Bewegung auf vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeiten gibt.
- Die Eigenschaft, dass $\mathcal{E}^{(D)} = \mathcal{E}^{(N)}$ ist sogar noch schwächer als wesentliche Selbstadjungiertheit. Auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\mathcal{E}^{(D)} = \mathcal{E}^{(N)}$ genau dann, wenn $n \geq 2$.

Da wir im Folgenden nur noch vollständige riemannsche Mannigfaltigkeiten untersuchen, lassen wir die Superskripte (D) bzw. (N) weg und schreiben L für $L^{(D)} = L^{(N)}$, $\mathcal{E}$ für $\mathcal{E}^{(D)} = \mathcal{E}^{(N)}$, (T_t) für die assoziierte Halbgruppe und (G_α) für die assoziierte Resolvente.

KAPITEL 4

Stochastische Vollständigkeit

In diesem Kapitel geht es um stochastische Vollständigkeit. Wir lernen ein geometrisches Kriterium kennen, welches stochastische Vollständigkeit garantiert und diskutieren einige Beispiele.

Definition (Stochastische Vollständigkeit)**.** Eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit $(M, \mathbf{g}, \mu)$ heißt *stochastisch vollständig*, falls $T_t 1 = 1$ für alle $t > 0$.

Bemerkung. Es sei (B_t) die Brownsche Bewegung auf $M \cup \{\infty\}$, d.h. der stochastische Prozess mit

$$P(B_t \in A \mid B_0 = x) = T_t 1_A(x).$$

Die Mannigfaltigkeit ist genau dann stochastisch vollständig, wenn

$$P(B_t \in M \mid B_0 = x) = 1 \text{ für alle } x \in M,\ t > 0,$$

das heißt, wenn (B_t) die Mannigfaltigkeit zu keiner Zeit verlässt.

Die folgende Proposition charakterisiert stochastische Vollständigkeit. Aus Zeitgründen verzichten wir auf einen vollständigen Beweis und zeigen nur den für uns relevanten Teil.

Proposition (Charakterisierung stochastische Vollständigkeit)**.** *Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) $(M, \mathbf{g}, \mu)$ *ist stochastisch vollständig.*

(ii) *Für alle $\alpha > 0$ gilt $\alpha G_\alpha 1 = 1$.*

(iii) *Die Wärmeleitungsgleichung zum Anfangswert* 0 *hat eine eindeutige beschränkte Lösung, d.h. für $u \in C_b^\infty((0,\infty) \times M)$ mit $\Delta_\mu u = \partial_t u$ und $u(t, \cdot) \to 0$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ für $t \to 0+$ gilt $u \equiv 0$.*

(iv) *Für alle $\alpha > 0$ und $u \in C_b^\infty(M)$ mit $\Delta_\mu u = \alpha u$ gilt $u \equiv 0$.*

Beweis. (iii) $\Rightarrow$ (i): Im Kapitel über die lokale Regularitätstheorie haben wir gesehen, dass es eine glatte Version u von $(t, x) \mapsto T_t 1(x)$ gibt, die die Wärmeleitungsgleichung zum Anfangswert 1 löst. Da auch die Konstante Funktion die Wärmeleitungsgleichung zum Anfangswert 1 löst, folgt aus (iii), dass $T_t 1 = 1$. $\square$

Theorem (Grigor'yan '86)**.** *Es sei* $(M, \mathbf{g}, \mu)$ *eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Gilt*

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{r}{\log \mu(B_r^\rho(o))} \, \mathrm{d}r = \infty$$

für ein $r_0 > 0$ *und* $o \in M$*, so ist* $(M, \mathbf{g}, \mu)$ *stochastisch vollständig.*

Bemerkung.

- Die Größen $r_0 > 0$ und $o \in M$ spielen im vorigen Theorem keine herausragende Rolle. Da die Mannigfaltigkeit zusammenhängend ist, impliziert

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{\log \mu(B_r^\rho(o))} \, \mathrm{d}r = \infty$$

für ein $r_0 > 0$ und $o \in M$, dass

$$\int_{s}^{\infty} \frac{1}{\log \mu(B_r^\rho(x))} \, \mathrm{d}r = \infty$$

für alle $s > 0$ und $x \in M$. Deshalb schreibt man in der Literatur für diese Bedingung einfach kurz

$$\int^{\infty} \frac{r}{\log \mu(B_r^\rho)} \, \mathrm{d}r = \infty,$$

ohne Hinweis auf die genauen Integrationsgrenzen und den Referenzpunkt.

- Die Voraussetzung des Theorems sind erfüllt, falls es eine Folge (r_k) mit $\lim_{k\to\infty} r_k = \infty$ und eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass

$$\mu(B_{r_k}^\rho(o)) \leq \exp(C r_k^2) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dies ist insbesondere der Fall für $\mathbb{R}^n$ und kompakte Mannigfaltigkeiten.

- Das Volumenwachstum von Modellmannigfaltigkeiten kann beliebig groß werden. Ist nämlich $(M, \mathbf{g})$ ein riemannsches Modell, sodass $M \setminus \{o\}$ isometrisch zu $(0, \infty) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1}$ ist, so ist (M, ρ) vollständig und es gilt

$$\mathrm{vol}_{\mathbf{g}}(B_r^\rho(o)) = \omega_n \int_0^r \psi^{n-1}(r) \, \mathrm{d}r.$$

Tatsächlich gibt es eine stochastisch unvollständige Modellmannigfaltigkeit mit

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{\log \mu(B_r^\rho(o))} \, \mathrm{d}r < \infty.$$

In diesem Sinne ist das vorige Theorem optimal, obwohl es im Allgemeinen nur hinreichend ist.

Ende 18. Vorlesung

Wir werden das Theorem von Grigor'yan aus dem folgenden Satz herleiten, welcher auch von Grigor'yan stammt.

Theorem (Eindeutigkeitsklasse zur Wärmeleitungsgleichung)**.** *Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit, $T > 0$ und $u \in C^\infty((0,T) \times M)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $u(t,\cdot) \to 0+$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Existiert ein $o \in M$ und eine monoton wachsende Funktion $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit*

$$\int^\infty \frac{r}{f(r)}\,\mathrm{d}r = \infty,$$

sodass für alle $R > 0$ gilt

$$\int_0^T \int_{B_R^\rho(o)} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t \leq \exp(f(R)),$$

so folgt $u \equiv 0$.

Bemerkung. Das Theorem ist so zu lesen: Zwei Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zu einem gegebenen Anfangswert f (im Sinne von $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$!), deren Differenz nicht zu schnell wächst (in einem sehr präzisen Sinn), müssen übereinstimmen.

Bevor wir den Satz beweisen, diskutieren wir noch zwei Folgerungen und zeigen, dass die Resultate scharf sind.

Beweis. Grigor'yans Volumenwachstumskriterium für stochastische Vollständigkeit: Es genügt zu zeigen, dass jede beschränkte Lösung der Wärmeleitungsgleichung zum Anfangswert 0 verschwindet (s.o.). Sei also $u \in C_b^\infty((0,\infty) \times M)$ eine Lösung zur Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert 0. Da u gleichmäßig beschränkt ist und $\lim_{t\to 0+} u(t,\cdot) \to 0$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$, folgt mit dem Satz von Lebesgue $\lim_{t\to 0+} u(t,\cdot) \to 0$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Wir setzen

$$S := \sup_{t>0,\, x\in M} |u(t,x)|$$

und

$$f(r) := \log(S^2 T \mu(B_r^\rho(o))).$$

Nach unserer Voraussetzung gilt

$$\int^\infty \frac{r}{f(r)}\,\mathrm{d}r = \infty,$$

und die Wahl von f und S impliziert

$$\int_0^T \int_{B_R^\rho(o)} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t \leq S^2 T \mu(B_r^\rho(o)) = \exp(f(R)).$$

Daher folgt die gewünschte Aussage aus dem Resultat zur Eindeutigkeitsklasse der Wärmeleitungsgleichung. $\square$

Theorem (Tychonoff '35, Täcklind '36). *Es sei $T > 0$ und es sei $u \in C^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^n)$ eine Lösung zur Wärmeleitungsgleichung mit $u(t,\cdot) \xrightarrow{t\to 0+} 0$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $0 < t < T$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|u(t,x)| \leq C \exp(C|x|^2),$$

so folgt $u \equiv 0$ (Tychonoff). Die gleiche Aussage gilt, falls es eine monoton wachsende konvexe Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\int^\infty \frac{r}{f(r)}\,\mathrm{d}r = \infty$$

und

$$|u(t,x)| \leq \exp f(|x|),$$

für alle $0 < t < T$ und $x \in \mathbb{R}^n$ (Täcklind).

Beweis. Es genügt die Aussage für konvexe Funktionen zu zeigen. Da im $\mathbb{R}^n$ gilt $\lambda(B_R(0)) = CR^n$, folgt aus der Annahme

$$\int_0^T \int_{B_R(0)} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}t \leq CR^n \exp(2f(R)) = \exp(\tilde{f}(R)),$$

wobei $\tilde{f}(R) = 2f(R) + n\log r + \log C$. Die Konvexität von f impliziert $n \log R + \log C \leq f(R)$ für große R (falls f nicht konstant). Damit folgt die Aussage aus dem Resultat zur Eindeutigkeitsklasse der Wärmeleitungsgleichung. $\square$

Tychonoffs und Täcklinds Bedingung für die Eindeutigkeit von Lösungen zur Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$ sind scharf. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine von null verschiedene Lösung zur Wärmeleitungsgleichung u mit Anfangswert 0 (in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, welche

$$|u(t,x)| \leq C\exp(C|x|^{2+\varepsilon})$$

für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Wir konstruieren nun eine solche Funktion.

Für $\alpha > 1$ definieren wir $h_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h_\alpha(t) = \begin{cases} \exp(-t^{-\alpha}) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}.$$

Aus der Analysis I Vorlesung ist bekannt, dass h_α eine glatte Funktion ist, mit $h_\alpha^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (insbesondere wird sie nicht durch ihre Taylor-Reihe um 0 dargestellt). Die folgenden Abschätzungen für die Ableitungen sind weniger offensichtlich.

Lemma. *Es existiert eine Konstante $0 < \theta = \theta(\alpha) < 1$, sodass*

$$|h_\alpha^{(n)}(t)| \leq \frac{n!}{(\theta t)^n} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right) \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N},\ t > 0.$$

Beweis. Sei $t > 0$ beliebig und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(s) = t + \delta \exp(is)$. Da h holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z > 0\}$ ist, folgt aus den Cauchy-Formeln für Ableitungen, dass

$$h_\alpha^{(n)}(t) = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{h_\alpha(\gamma(s))\dot\gamma(s)}{(\gamma(s) - t)^{n+1}} \, \mathrm{d}s.$$

Für $z = |z| \exp(i\varphi)$ mit $\varphi \in [-\pi, \pi)$ gilt nach Definition und den üblichen Rechenregeln im komplexen

$$\mathrm{Re} z^{-\alpha} = |z|^{-\alpha} \cos(-\alpha\varphi).$$

Beachte: Es gilt $z^{-\alpha} = \exp(-\alpha \log z)$, mit dem Hauptzweig $\log z = \log |z| + i\varphi$.

Setzen wir $\delta = \theta t$, so gilt für alle $z = t + \delta \exp(is)$ auf der Kurve γ, dass

$$|z| \geq ||t| - |\delta \exp(is)|| = |t - \delta| = t|1 - \theta|$$

und

$$|\varphi| \leq \arccos \frac{t}{\sqrt{t^2 + \delta^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}}.$$

Zeichnung

Aus diesen Rechnungen folgt, dass wir $\theta > 0$ abhängig von α aber unabhängig von t so klein wählen können, sodass für alle z auf γ gilt

$$\mathrm{Re} z^{-\alpha} = |z|^{-\alpha} \cos(-\alpha\varphi) \geq \frac{1}{2} t^{-\alpha}.$$

Die Formel für die Ableitungen von oben liefert nun

$$|h_\alpha^{(n)}(t)| \leq \frac{n!}{\delta^n} \exp\left(-\frac{1}{2} t^{-\alpha}\right) = \frac{n!}{(\theta t)^n} \exp\left(-\frac{1}{2} t^{-\alpha}\right).$$

□

Ende 19. Vorlesung

Für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$u_\alpha(t, x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} h_\alpha^{(n)}(t).$$

Offensichtlich konvergiert die Reihe für $t \leq 0$. Die Konvergenz für $t > 0$ und weitere Eigenschaften folgen aus der eben bewiesenen Abschätzung.

Lemma. *Die Funktion u_α ist eine Lösung zur Wärmeleitungsgleichung und erfüllt $\lim_{t \to 0+} u(t, \cdot) = 0$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ gilt*

$$|u_\alpha(t, x)| \leq \exp\left(\frac{1}{t}\left(\frac{|x|^2}{\theta} - \frac{1}{2} t^{1-\alpha}\right)\right),$$

wobei θ eine Konstante wie aus dem vorigen Lemma ist.

Beweis. Formales Differenzieren der Summanden und eine Indexverschiebung zeigt, dass u_α die Wärmeleitungsgleichung löst, falls wir Summation und Differentiation vertauschen dürfen.

Da $\frac{n!}{(2n)!} \leq \frac{1}{n!}$ erhalten wir

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} h_\alpha^{(n)}(t)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{2n}}{n!(\theta t)^n} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{t}\left(\frac{x^2}{\theta} - \frac{1}{2}t^{1-\alpha}\right)\right).$$

Nach dem Majorantenkriterium für Reihen konvergiert die Reihe für u_α lokal gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$ und gleichmäßig in $t \in \mathbb{R}$. Weiterhin folgt aus dieser Ungleichung $u(t, x) \to 0$ lokal gleichmäßig in x für $t \to 0+$ und damit insbesondere in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Für festes t ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} h_\alpha^{(n)}(t)$$

eine Potenzreihe in x mit unendlichem Konvergenzradius. Daher gilt

$$\frac{d^2}{dx^2} u_\alpha(t, x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} h_\alpha^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} h_\alpha^{(n+1)}(t).$$

Nach unseren Abschätzungen für $h^{(n)}$ konvergiert die Reihe auf der rechten Seite gleichmäßig in t. Ist (f_n) eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig und g eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ mit $f_n' \to g$ gleichmäßig, so ist f differenzierbar und es gilt $f' = g$ (Übung). Aus dieser Beobachtung und den bereits bewiesenen Eigenschaften folgt nun leicht, dass auch

$$\frac{d}{dt} u_\alpha(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} h_\alpha^{(n+1)}(t)$$

gilt. □

Eine Konsequenz dieses Lemmas ist, dass die Wärmeleitungsgleichung auch auf vollständigen Mannigfaltigkeit nicht eindeutig lösbar ist und dass die Abschätzung im Kriterium von Tychonoff gleichmäßig in t sein muss. Für jedes $t > 0$ existiert nämlich eine Konstante $C(t) > 0$, sodass

$$|u_\alpha(t, x)| \leq C(t) \exp(C(t)|x|^2) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Trotzdem gilt das folgende Lemma, welches zeigt, dass die Bedingung im Eindeutigkeitsresultat von Tychonoff scharf ist.

Lemma. *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Lösung zur Wärmeleitungsgleichung u mit Anfangswert 0 (in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$), welche nicht verschwindet und für die eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass*

$$|u(t, x)| \leq C \exp\left(C|x|^{2+\varepsilon}\right) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir zeigen, dass u_α mit genügend großem $\alpha > 1$ diese Bedingung erfüllt. Aufgrund des vorherigen Lemmas genügt es zu zeigen, dass es $\alpha > 1$ gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ gilt

$$\frac{1}{t}\left(\frac{|x|^2}{\theta} - \frac{1}{2}t^{1-\alpha}\right) \leq C|x|^{2+\varepsilon}.$$

Dies zu verifizieren ist jedoch eine leichte Extremwertaufgabe. □

Wir beweisen nun den Satz über die Eindeutigkeitsklasse der Wärmeleitungsgleichung in zwei Schritten. Zunächst benötigen wir eine Abschätzung für gewisse Lösungen zur Wärmeleitungsgleichung.

Lemma. *Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Ferner sei $0 \leq a < b$ und $u \in C^\infty((a,b) \times M)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, für die die Grenzwerte*

$$u(a, \cdot) := \lim_{t \to a+} u(t, \cdot) \text{ und } u(b, \cdot) := \lim_{t \to b-} u(t, \cdot)$$

in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ existieren. Ist $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion und $o \in M$, sodass

$$\int_a^b \int_{B_R(o)} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(t)\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \exp(f(R)) \text{ für alle } R > 0,$$

so gilt

$$\int_{B_R(o)} |u(b,x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{B_{4R}(o)} |u(a,x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) + \frac{4n}{R^2}, \qquad (\heartsuit)$$

falls

$$b - a \leq \frac{R^2}{8nf(4R)}. \qquad (\diamondsuit)$$

Bemerkung.

- Ist $u \in C^\infty((0,T) \times M)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $u(t, \cdot) \overset{t \to 0+}{\longrightarrow} f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$, so kann das vorige Lemma für alle $0 \leq a < b < T$ angewendet werden.
- Das Lemma sagt Folgendes: Man kann die Werte einer Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf einer Kugel zu einem späteren Zeitpunkt durch die Werte der Lösung zu einem früheren Zeitpunkt auf einer größeren Kugel bis auf einen kleinen Fehler kontrollieren. Wie groß dabei der Zeitunterschied höchstens sein darf, hängt von der Lösung und der Größe der Kugel ab.

Beweis. Wegen der Stetigkeitsvoraussetzungen an u und da abgeschlossene Kugeln in M kompakt sind, können wir annehmen, dass u in einer Umgebung von $[a, b] \times M$ glatt ist. Für eine 1-Lipschitz-Funktion

$\rho : M \to \mathbb{R}$ und $s \notin [a, b]$ definieren wir die Funktion $\xi : [a, b] \times M \to \mathbb{R}$ durch

$$\xi(t, x) := \frac{\rho(x)^2}{4n(t - s)}.$$

Wir werden ρ und s später genauer wählen. Der Satz von Rademacher und die Kettenregel (! hier muss nochmal lokalisiert werden, wir haben sie nur auf $W^1(M, \mu)$ bewiesen) liefern

$$|\nabla_{\mathbf{g}}\xi(t, \cdot)| \leq \frac{|\rho|}{2\sqrt{n}|t - s|}.$$

Ferner gilt

$$\partial_t \xi(t, x) = -\frac{\rho^2(x)}{4n(t - s)^2},$$

weswegen

$$\partial_t \xi + |\nabla_{\mathbf{g}}\xi|^2 \leq 0.$$

Zu gegebenen $R > 0$ definieren wir die Funktion $\varphi : M \to \mathbb{R}$ durch

$\longleftrightarrow$ Zeichnung

$$\varphi(x) := (3 - \rho(x, o)/R)_+ \wedge 1.$$

Die Funktion φ hat die folgenden Eigenschaften:

- $0 \leq \varphi \leq 1$ auf M,
- $\varphi \equiv 1$ auf $B_{2R}(o)$,
- $\varphi \equiv 0$ auf $M \setminus B_{3R}(o)$,
- φ ist $1/R$-Lipschitz.

Da M vollständig ist, gilt $\varphi \in \mathrm{Lip}_c(M) \subseteq W_0^1(M, \mu)$. Für festes t ist die Funktion $u\varphi^2 e^\xi$ als Produkt und Hintereinanderausführung von lokalen Lipschitz-Funktionen eine lokale Lipschitz Funktion. Da φ kompakten Träger hat, gilt $u\varphi^2 e^\xi \in \mathrm{Lip}_c(M)$.

Multiplizieren wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u = \Delta_\mu u$$

mit $u\varphi^2 e^\xi$ und integrieren wir das Ergebnis über $[a, b] \times M$, so erhalten wir

$$\int_a^b \int_M (\partial_t u) u\varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t = \int_a^b \int_M (\Delta_\mu u) u\varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t.$$

Da u und ξ in einer Umgebung von $[a, b]$ glatt sind, gilt für das Zeit-Integral der linken Seite dieser Gleichung

$$\begin{aligned}\int_a^b (\partial_t u) u\varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_a^b \partial_t(u^2)\varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\, u^2\varphi^2 e^\xi\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b (\partial_t \xi)\varphi^2 u^2 e^\xi \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Um das Raumintegral auszuwerten verwenden wir die Greensche Formel (! für die W^1_{loc}-Funktion u und die W^1_0-Funktion mit kompakten Träger $u\varphi^2 e^\xi$, approximiere $u\varphi^2 e^\xi$ durch geeignete glatte Funktionen mit kompaktem Träger) und erhalten

$$\int_M (\Delta_\mu u) u\varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu = -\int_M \langle \nabla_{\mathbf{g}} u, \nabla_{\mathbf{g}}(u\varphi^2 e^\xi)\rangle_{\mathbf{g}} \,\mathrm{d}\mu.$$

Die Kettenregel und die Produktregel (!) zeigen

$$\begin{aligned}
-\langle \nabla_{\mathbf{g}} u, \nabla_{\mathbf{g}}(u\varphi^2 e^\xi)\rangle_{\mathbf{g}} &= -|\nabla_{\mathbf{g}} u|^2_{\mathbf{g}} \varphi^2 e^\xi - \langle \nabla_{\mathbf{g}} u, \nabla_{\mathbf{g}} \xi\rangle_{\mathbf{g}} u\varphi^2 e^\xi \\
&\quad - 2\langle \nabla_{\mathbf{g}} u, \nabla_{\mathbf{g}} \varphi\rangle u\varphi e^\xi \\
&\le -|\nabla_{\mathbf{g}} u|^2_{\mathbf{g}} \varphi^2 e^\xi + |\nabla_{\mathbf{g}} u|_{\mathbf{g}} |\nabla_{\mathbf{g}} \xi|_{\mathbf{g}} |u| \varphi^2 e^\xi \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}|\nabla_{\mathbf{g}} u|^2_{\mathbf{g}} \varphi^2 + 2|\nabla_{\mathbf{g}} \varphi|^2_{\mathbf{g}} u^2\right) e^\xi \\
&= \left(-\frac{1}{2}|\nabla_{\mathbf{g}} u|^2_{\mathbf{g}} + |\nabla_{\mathbf{g}} u|_{\mathbf{g}} |\nabla_{\mathbf{g}} \xi|_{\mathbf{g}} |u|\right) \varphi^2 e^\xi \\
&\quad + 2|\nabla_{\mathbf{g}} \varphi|^2_{\mathbf{g}} u^2 e^\xi.
\end{aligned}$$

Setzen wir diese Identitäten und Ungleichungen zusammen und verwenden zusätzlich $\partial_t \xi + |\nabla_{\mathbf{g}} \xi|^2_{\mathbf{g}} \le 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_M u^2\varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu \Big|_a^b &= \int_a^b \int_M (\partial_t \xi) \varphi^2 u^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t + 2\int_a^b \int_M (\Delta_\mu u) u\varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t \\
&\le \int_a^b \int_M \left(-|\nabla_{\mathbf{g}} \xi|^2_{\mathbf{g}} u^2 - |\nabla_{\mathbf{g}} u|^2_{\mathbf{g}} + 2|\nabla_{\mathbf{g}} u|_{\mathbf{g}} |\nabla_{\mathbf{g}} \xi|_{\mathbf{g}} |u|\right) \varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t \\
&\quad + 4\int_a^b \int_M |\nabla_{\mathbf{g}} \varphi|^2_{\mathbf{g}} u^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t \\
&= -\int_a^b \int_M \left(|\nabla_{\mathbf{g}} u|_{\mathbf{g}} - |\nabla_{\mathbf{g}} \xi|_{\mathbf{g}} |u|\right)^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t + 4\int_a^b \int_M |\nabla_{\mathbf{g}} \varphi|^2_{\mathbf{g}} u^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

und somit

$$\int_M u^2\varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu \Big|_a^b \le 4\int_a^b \int_M |\nabla_{\mathbf{g}} \varphi|^2_{\mathbf{g}} u^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t.$$

$\longleftrightarrow$ Ende 20. Vorlesung

Der Satz von Rademacher impliziert $|\nabla_{\mathbf{g}} \varphi|^2_{\mathbf{g}} \le n/R^2$. Aufgrund der anderen Eigenschaften von φ folgt

$$\begin{aligned}
\int_{B^\rho_R(o)} u(b,x)^2 e^{\xi(x,b)} \,\mathrm{d}\mu(x) &\le \int_{B_{4R}(o)} u(a,x)^2 e^{\xi(x,a)} \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\quad + \frac{4n}{R^2} \int_a^b \int_{B^\rho_{4R}(o) \setminus U^\rho_{2R}(o)} u^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

$\longleftrightarrow$ Zeichnung

Nun wählen wir ρ und s. Sei $\rho : M \to \mathbb{R}$, $\rho(x) := (\rho(x,o) - R)_+$ und $s := 2b - a$. Für alle $t \in [a,b]$ gilt dann

$$b - a \le s - t \le 2(b - a)$$

und damit

$$\xi(t,x) = -\frac{\rho(x)^2}{4n(s-t)} \leq -\frac{\rho(x)^2}{8n(b-a)} \leq 0.$$

Ferner ist $\xi \equiv 0$ auf $B^\rho_R(o)$ und $\rho \geq R$ auf $B^\rho_{4R}(o) \setminus U^\rho_{2R}(o)$, weswegen

$$\xi \leq -\frac{R^2}{8n(b-a)} \text{ auf } [a,b] \times B^\rho_{4R}(o) \setminus U^\rho_{2R}(o).$$

Eingesetzt in die letzte Ungleichung liefern diese Beobachtungen

$$\begin{aligned}\int_{B_R(o)} u(b,x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{B_{4R}(o)} & u(a,x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \\ & + \frac{4n}{R^2} \exp\left(-\frac{R^2}{8n(b-a)}\right) \int_a^b \int_{B_{4R}(o)} u^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Die Funktion u erfüllt laut Annahme

$$\int_a^b \int_{B^\rho_{4R}(o)} u^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t \leq \exp(f(4R))$$

und unsere hergeleitete Ungleichung vereinfacht sich weiter zu

$$\int_{B^\rho_R(o)} u(b,x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{B^\rho_{4R}(o)} u(a,x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) + \frac{4n}{R^2} \exp\left(-\frac{R^2}{8n(b-a)} + f(4R)\right).$$

Falls ($\lozenge$) erfüllt ist, gilt

$$-\frac{R^2}{8n(b-a)} + f(4R) \leq 0.$$

Damit ist die gewünschte Ungleichung bewiesen. $\square$

Beweis. Theorem über die Eindeutigkeitsklasse der Wärmeleitungsgleichung: Sei $u \in C^\infty((0,T) \times M)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $u(t,\cdot) \to 0$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Wie im vorigen Lemma definieren wir $u(0,x) := 0$ für alle $x \in M$.

Die Idee des Beweises ist es, das vorherige Lemma zu nutzen, um $u(t,\cdot)$ auf einer vorgegebenen Kugel durch $u(0,\cdot) = 0$ auf einer größeren Kugel bis auf einen kleinen Fehler abzuschätzen. Da das Lemma aber nur für kleine Zeiten gilt, muss iterativ vorgegangen werden.

Sei $R > 0$ beliebig und $0 < t < T$. Wir setzen $R_k := 4^k R$, $\tau_0 = 0$ und

$$\tau_k := \frac{1}{128n} \frac{R_k^2}{f(R_k)}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Nun definieren wir Zeiten

Zeichnung

$$t_k := \begin{cases} t - \sum_{l=0}^k \tau_l & \text{falls } t - \sum_{l=1}^k \tau_l > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllen die Zeiten $0 \leq t_k < t_{k-1}$ und die Radien R_{k-1} gerade

$$t_{k-1} - t_k \leq \tau_k = \frac{1}{128n}\frac{R_k^2}{f(R_k)} = \frac{1}{128n}\frac{16R_{k-1}^2}{f(4R_{k-1})} = \frac{R_{k-1}^2}{8nf(4R_{k-1})}$$

und damit die Bedingung ($\Diamond$) aus dem vorherigen Lemma. Ungleichung ($\heartsuit$) liefert

$$\int_{B_{R_{k-1}}(o)} u(t_{k-1}, x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{B_{R_k}(o)} u(t_k, x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) + \frac{4n}{R_{k-1}^2},$$

weshalb durch Induktion folgt

$$\begin{aligned}\int_{B_R(o)} u(t, x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) &\leq \int_{B_{R_k}(o)} u(t_k, x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) + \sum_{l=1}^{k} \frac{4n}{R_{l-1}^2} \\ &\leq \int_{B_{R_k}(o)} u(t_k, x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) + \frac{C}{R^2}.\end{aligned}$$

Dabei ist $C > 0$ eine Konstante, welche nicht von k abhängt. Wir müssen nun noch zeigen, dass $t_k = 0$ für ein endliches k, da dann die Behauptung aus $u(0, \cdot) = 0$ und dem Grenzübergang $R \to \infty$ in der letzten Ungleichung folgt.

Da f monoton wachsend ist, folgt aus der Wachstumsbedingung für f

$$\infty = \int_R^\infty \frac{r}{f(r)} \,\mathrm{d}r \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{R_k}^{R_{k+1}} \frac{r}{f(r)} \,\mathrm{d}r \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_{k+1}^2}{f(R_k)}.$$

Wir erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tau_k = \infty$$

und das Theorem ist bewiesen. $\square$

Ende 21. Vorlesung

Literaturverzeichnis

[1] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 2005. Grundwissen Mathematik. [Basic Knowledge in Mathematics].

[2] Alexander Grigor'yan. *Heat kernel and analysis on manifolds*, volume 47 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009.

[3] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.