Globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten - Notizen[1]

Jena - Wintersemester 2018

Marcel Schmidt

[1]Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Kommentare sind willkommen.

KAPITEL 1

Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Bevor wir globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten betreiben können, müssen wir zunächst die relevanten Objekte, nämlich riemannsche Mannigfaltigkeiten einführen. Das ist der Ihnalt dieses Kapitels.

1. Topologische Räume

In diesem Abschnitt führen wir ganz kurz topologische Räume und ihre grundlegenden Eigenschaften ein.

Definition (Topologischer Raum)**.** Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{T}$ ein System von Teilmengen von X. Es heißt $\mathcal{T}$ *Topologie* bzw. *Topologie auf* X, falls die folgenden Eigenschaften gelten.

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(T2) Falls für $n \in \mathbb{N}$ gilt $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$, so ist auch

$$\bigcap_{k=1}^{n} O_k \in \mathcal{T}.$$

(T3) Ist $I \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und gilt $O_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$, so ist auch

$$\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}.$$

Element von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*. Die Komplemente offener Mengen heißen *abgeschlossene Mengen*.

Beispiel. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist

$$\mathcal{T}_d := \{U \subseteq X \mid U \text{ offen in } (X, d)\}$$

eine Topologie auf X. Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X heißt *metrisierbar*, falls es eine Metrik d auf X gibt, mit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Beispiel (Unterraumtopologie)**.** Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist $\mathcal{T}|_Y := \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf Y, die *Unterraumtopologie*. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so gilt

$$\mathcal{T}_d|_Y = \mathcal{T}_{d|_{Y \times Y}}.$$

Bemerkung. Tatsächlich sind alle Topologien, die wir später untersuchen, metrisierbar. Allerdings ist es oft viel leichter eine Topologie zu konstruieren, als die Metrik, die sie erzeugt.

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt *Umgebung* von $x \in X$, falls es eine offene Menge O gibt mit $x \in O \subseteq U$.

Sei $S \subseteq X$. Die kleinste abgeschlossene Menge, die S enthält, heißt *Abschluss* von S und wird mit $\overline{S}$ bezeichnet. Die größte offene Mengen, die S enthält, heißt *Inneres* von S, und wird mit S° bezeichnet.

Lemma (Erzeugerprinzip)**.** *Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{A}$ ein System von Teilmengen von X. Dann gibt es eine eindeutige (bezüglich Mengeninklusion) kleinste Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{A})$.*

Beweis. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}, \mathcal{T} \text{ Topologie}} \mathcal{T}$$

die gewünschten Eigenschaften hat. □

Die im vorigen Lemma erwähnte Topologie heißt *von $\mathcal{A}$ erzeugte Topologie*. Ferner heißt $\mathcal{A}$ *Erzeuger* einer Topologie $\mathcal{T}$, falls $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \mathcal{T}$. Die Topologie eines metrischen Raumes wird durch offene Kugeln erzeugt.

Wir erwähen nun wichtige Konzepte in topologischen Räumen.

Definition. Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

(a) Es heißt $\mathcal{T}$ *Hausdorffsch*, falls es für alle $x, y \in X$ offene Mengen $U_x, U_y \in \mathcal{T}$ gibt, mit $x \in U_x, y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$. ('$\mathcal{T}$ trennt die Punkte')

(b) Eine Menge $\mathcal{B}$ heißt *Basis* der Topologie $\mathcal{T}$, falls jede offene Menge aus $\mathcal{T}$ eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

(c) Es erfüllt $\mathcal{T}$ das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*, falls es eine abzählbare Basis hat.

Bemerkung. (a) Es gibt natürlich auch das erste Abzählbarkeitsaxiom. Da wir es hier nicht benötigen, gehen wir nich weiter darauf ein.

(b) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist $\mathcal{T}_d$ stets Hausdorffsch (da unterschiedliche Punkte positven Abstand voneinander haben) und die Menge aller offenen Kugeln ist eine Basis der Topologie.

(c) Ein metrischer Raum (X, d) erfüllt genau dann das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn er separabel ist (Übung).

(d) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, so ist $\mathcal{B}$ automatisch ein Erzeuger von $\mathcal{T}$.

Definition (Stetige Funktion)**.** Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(X', \mathcal{T}')$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt *stetig*, falls für alle $O' \in \mathcal{T}'$ gilt

$$f^{-1}(O') \in \mathcal{T}.$$

Eine stetige Funktion heißt *Homöomorphismus*, falls f bijektiv und die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist.

Lemma (Finaltopologie)**.** *Es seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume und $f_i : X_i \to X$, $i \in I$, Abbildungen. Für ein System von Teilmengen $\mathcal{T}$ von X sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{T}$ ist die (bezüglich Mengeninklusion) größte Topologie, für die alle Abbildungen $f_i, i \in I$, stetig sind.

(ii) Es gilt $O \in \mathcal{T}$ genau dann, wenn $f_i^{-1}(O) \in \mathcal{T}_i$ für alle $i \in I$.

(iii) $\mathcal{T}$ ist eine Topologie und ist $(X', \mathcal{T}')$ ein topologischer Raum, so ist eine Abbildung $g : X \to X'$ genau dann stetig, wenn $g \circ f_i$ für alle $i \in I$ stetig ist.

Insbesondere existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X, die einer der drei Bedingungen genügt.

Beweis. Übung. □

Die im vorigem Lemma erwähnte Topologie heißt *Finaltopologie* auf X bezüglich $f_i, i \in I$.

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation, so heißt die Finaltopologie bezüglich der kanonischen Projektion

$$\pi : X \to X/\sim$$

die *Quotiententopologie* $\mathcal{T}/\sim$ auf $X/\sim$. Eine Menge $O \subseteq X/\sim$ ist genau dann offen bezüglich der Quotiententopologie, wenn $\pi^{-1}(O) \in \mathcal{T}$. Erfüllt $\mathcal{T}$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, dann erfüllt auch die Quotiententopologie das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Ende 1. Vorlesung

Lemma (Initialtopologie)**.** *Es seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$, topologische Räume und $f_i : X \to X_i$, $i \in I$, Abbildungen. Für eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{T}$ ist die (bezüglich Mengeninklusion) kleinste Topologie, für die alle Abbildungen $f_i, i \in I$ stetig sind.

(ii) $\mathcal{T}$ ist die von dem System $\{f_i^{-1}(O) \mid i \in I, O \in \mathcal{T}_i\}$ erzeugte Topologie.

(iii) Es sei $(X', \mathcal{T}')$ ein topologischer Raum. Eine Abbildung $g : X \to X'$ ist genau dann stetig, wenn $f_i \circ g$ für alle $i \in I$ stetig ist.

Insbesondere existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}$ auf X, die einer der drei Bedingungen genügt.

Beweis. Übung. □

Die im vorigem Lemma erwähnte Topologie heißt *Initialtopologie* auf X bezüglich $f_i, i \in I$.

Es seien $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ topologische Räume und $X := X_1 \times \cdots \times X_n$, sowie $\pi_k : X \to X_k, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_k$. Die Initialtopologie auf X bezüglich der $\pi_k, k = 1, \ldots, n$ heißt *Produkttopologie* auf X. Die Menge

$$\{O_1 \times \cdots \times O_n \mid O_k \in \mathcal{T}_k\}$$

ist eine Basis der Produkttopologie.

2. Topologische Mannigfaltigkeiten

Definition (Topologische Mannigfaltigkeit)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein topologischer Raum $(M, \mathcal{T})$ heißt *topologische n-dimensionale Mannigfaltigkeit* (oder kurz *n-Mannigfaltigkeit* bzw. *Mannigfaltigkeit*), falls er die folgenden Bedingungen erfüllt.

(M1) $(M, \mathcal{T})$ ist Hausdorffsch.

(M2) $(M, \mathcal{T})$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(M3) $(M, \mathcal{T})$ ist n-dimensional lokal euklidisch, das heißt jeder Punkt in M besitzt eine offene Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

Zeichnung

Bemerkung.
- Prinzipiell gibt es viele nicht homöomorphe Topologien $\mathcal{T}$ auf einer Menge M, die $(M, \mathcal{T})$ in eine topologischen Mannigfaltigkeit verwandeln. In konkreten Beispielen einigen wir uns oft auf eine 'kanonische' Topologie und bei beliebigen topologischen Mannigfaltigkeiten spielt ihre konkrete Gestalt keine Rolle. Deshalb lassen wir $\mathcal{T}$ oft weg und schreiben nur M statt $(M, \mathcal{T})$.
- In der obigen Definition ist der $\mathbb{R}^n$ natürlich mit DER üblichen Topologie versehen, die vom euklidischen Abstand induziert wird. Sie ist die einzige Topologie, für die $\mathbb{R}^n$ ein topologischer Vektorraum ist, d.h. für welche die Operationen

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (x, y) \mapsto x + y$$

und

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

stetig sind.

Definition (Karte)**.** Sei M eine n-Mannigfaltigkeit. Ein Paar (U, φ), bestehend aus eine offenen Teilmenge $U \subseteq M$ und einer Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, heißt *Karte*, falls $\varphi(U)$ offen in $\mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \to \varphi(U)$ ein Homöomorphismus ist. In diesem Fall heißt U *(lokales) Koordinatengebiet* und die durch die Gleichung

Zeichnung

$$\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p)) \text{ für alle } p \in U$$

bestimmten Funktionen $x^i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, heißen *(lokale) Koordinatenfunktionen.* Eine Sammlung von Karten, deren Koordinatengebiete M überdecken, heißt *Atlas.*

Oft nutzt man die lokalen Koordinatenfunktionen um Kartengebiete mit ihrem Bild im $\mathbb{R}^n$ zu identifizieren. Wie wir später sehen werden, kann dies leicht zu Verwirrung führen. Man sollte daher stets im Kopf behalten, ob man auf der Mannigfaltigkeit oder im $\mathbb{R}^n$ rechnet. Wir geben nun einige Beispiele.

Beispiel ($\mathbb{R}^n$ und seine offenen Teilmengen)**.** Der $\mathbb{R}^n$ (mit DER üblichen Topologie) ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Die Identitätsabbildung

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto x$$

ist eine (globale) Karte und $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ ist ein Atlas. Offenbar ist jede offene Teilmenge ausgestattet mit der Unterraumtopologie auch wieder eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Beispiel ($\mathbb{S}^n$)**.** Die n-dimensionale Sphäre

$$\mathbb{S}^n := \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = 1\}$$

versehen mit der Unterraumtopologie ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Für $i = 1, \ldots, n$ sei

$$U_i^+ := \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x^i > 0\}$$

und

$$U_i^- := \{(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x^i < 0\}.$$

Die Abbildungen

$$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$$
$$(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^i, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1}) \mapsto (x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n+1})$$

sind Karten und deren Gesamtheit bildet einen Atlas für $\mathbb{S}^n$. Man kann leicht zeigen, dass $\mathbb{S}^n$ keinen Atlas besitzt, der nur aus einer Karte besteht (Übung).

Beispiel (Projektiver Raum)**.** Auf der offenen Menge $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definieren wir die folgende Äquivalenzrelation:

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \text{ es existiert } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \lambda x = y.$$

Der n-dimensionale (reelle) projektive Raum ist die Menge

$$P^n(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/ \sim$$

ausgestattet mit der Quotiententopologie. Diese ist wiefolgt definiert. Ist

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to P^n(\mathbb{R})$$

die Quotientenabbildung, so ist per Definition $U \subseteq P^n(\mathbb{R})$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ (und damit offen in $\mathbb{R}^{n+1}$) ist. Der n-dimensionale (reelle) projektive Raum ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Für $i = 1, \ldots, n+1$ sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_i : \{[(x_1, \ldots, x_{n+1})] \in P^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\} &\to \mathbb{R}^n \\ [(x_1, \ldots, x_{n+1})] &\mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i} \right). \end{aligned}$$

Karten und ihre Gesamtheit bildet einen Atlas für $P^n(\mathbb{R})$ (Übung).

Beispiel (Torus)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den n-Torus als das n-fache Kartesische Produkt $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ und statten ihn mit der Produkttopologie aus (der Initaltopologie bezüglich der Projektionen $\pi_i : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1, \pi_i((z_1, \ldots, z_n)) = z_i$). Es ist $\mathbb{T}^n$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, die im Fall $n = 2$ homöomorph zur Oberfläche eines Donut ist (Übung).

Zeichnung

Beispiel (Matrizen)**.** Der Raum der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$, den wir mit $M_n(\mathbb{R})$ bezeichnen, ist ein n^2-dimensionaler Vektorraum. Ausgestattet mit der üblichen Topologie des $\mathbb{R}^{n^2}$ ist er eine Topologische n^2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Der Raum der invertierbaren Matrizen $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det M \neq 0\}$ ist eine offene Teilmenge von $M_n(\mathbb{R})$ und damit in natürlicher Weise auch eine n^2-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Beispiel (Graphen)**.** Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^k$ stetig. Dann ist

$$\operatorname{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$$

versehen mit der Unterraumtopologie eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Abbildung $\varphi : \operatorname{Graph}(f) \to U$, $(x, y) \mapsto x$ ist ein Homöomorphismus (Übung).

Beispiel. Das Kreuz $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$ ist keine Mannigfaltigkeit.

Das folgende bemerkenswerte Theorem zeigt, dass die Dimension einer (nichtleeren) topologischen Mannigfaltigkeit eindeutig festgelegt ist.

Theorem (Topologische Invarianz der Dimension)**.** *Eine nichtleere n-Mannigfaltigkeit kann nur dann zu einer m-Mannigfaltigkeit homöomorph sein, wenn $m = n$.*

Beweis. Siehe [**2**, Theorem 17.26]. □

Es gibt prinzipiell zwei Zugänge um die topologische Invarianz der Dimension zu beweisen. Zum einen kann man algebraische Topologie (singuläre Homologie oder DeRham Kohomologie) verwenden oder aber man benutzt folgendes Resultat über die Invarianz von Gebieten im $\mathbb{R}^n$. Es ist eine (mehr oder weniger direkte) Folgerung aus dem Fixpunktsatz von Brouwer.

Theorem (Topologische Invarianz von Gebieten)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine stetige injektive Abbildung. Dann ist $f(\Omega)$ ein Gebiet.*

Bemerkung. Üblicherweise wird in einer Analysis II Vorlesung der Satz über die Inverse Abbildung bewiesen. Das vorige Theorem verallgemeinert eine Teilaussage dieses Satzes, nämlich die dass das Bild einer stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarer Ableitung offen ist.

3. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Die lineare Struktur des $\mathbb{R}^n$ erlaubt es uns, differenzierbare Abbildungen (genügend gute Abbildungen) durch lineare Abbildungen (einfache Abbildungen) zu approximieren. Die gewohnten Begriffe "Differenzierbarkeit" und "lineare Abbildung" lassen sich nicht direkt auf beliebige Mannigfaltigkeiten übertragen, da sie im Allgemeinen keine (oder keine kanonische) Vektorraumstruktur besitzen.

Den Begriff der differenzierbaren Funktion führt man daher mithilfe lokaler Koordinatendarstellungen der Funktion ein, wobei die betrachteten Karten gewisse Verträglichkeitseigenschaften besitzen müssen. Ableitungen werden dann einem nächsten Schritt (im nächsten Abschnitt) als lineare Abbildungen zwischen den Tangentialräumen (lineare Approximationen der Mannigfaltigkeiten) interpretiert.

Erinnerung: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt k-mal stetig differenzierbar (oder C^k-Abbildung), falls alle partiellen Ableitungen k-ter Ordnung existieren und stetig sind. Ferner heißt f *glatt* oder *C^∞-Abbildung*, falls sie für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine C^k-Abbildung ist.

Definition (C^k-Atlas)**.** Sei M eine Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Zwei Karten (U, φ) und (V, ψ) heißen *C^k-verbunden*, falls die *Kartenwechsel*

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

und

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

C^k-Abbildungen sind. Ein Atlas heißt *C^k-Atlas*, falls alle Paare von Karten in ihm C^k-verbunden sind.

Definition (Differenzierbare Mannigfaltigkeit)**.** Sei M eine Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ein bezüglich Mengeninklusion maximaler C^k-Atlas $\mathcal{D}$ heißt *differenzierbare Struktur der Ordnung k* oder kurz *C^k-Struktur* und das Paar $(M, \mathcal{D})$ heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit der Ordnung k* oder kurz *C^k-Mannigfaltigkeit.* Eine C^∞-Struktur wird auch *glatte Struktur* und eine C^∞-Mannigfaltigkeit auch *glatte Mannigfaltigkeit* genannt.

Die Maximalität einer differenzierbaren Struktur macht es sehr schwer (praktisch unmöglich) sie explizit anzugeben. Das folgende Lemma zeigt, dass das aus der Maßtheorie und Topologie bekannte Erzeugerprinzip auch für differenzierbare Strukturen nützlich ist.

Lemma (Erzeugung differenzierbarer Strukturen)**.** *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein C^k-Atlas. Dann existiert eine eindeutige differenzierbare Struktur $\mathcal{D}$ der Ordnung k, mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$.*

Beweis. Übung. □

Die eindeutige differenzierbare Struktur $\mathcal{D}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ heißt die *von $\mathcal{A}$ erzeugte differenzierbare Struktur.*

Beispiel. Alle angegebenen Atlanten aus den vorigen Beispielen, $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$, projektive Räume und Matrixräume, sind C^∞-verknüpft. Ausgestattet mit den von ihnen erzeugten glatten Strukturen sind diese Mannigfaltigkeiten also glatte Mannigfaltigkeiten.

Bemerkung.

- Differenzierbare Strukturen sind ein extra Stück an Information. Jede Mannigfaltigkeit die eine glatte Struktur besitzt, hat automatisch überabzählbar viele verschiedene glatte Strukturen. Diese müssen sich aber nicht wesentlich unterscheiden. So gibt es etwa auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \neq 4$ im wesentlichen (bis auf Diffeomorphie (s.u.)) nur eine glatte Struktur, aber auf $\mathbb{R}^4$ überabzählbar viele wesentlich verschiedene (nicht diffeomorphe) glatte Strukturen.
- Falls klar ist welche differenzierbare Struktur wir betrachten, lassen wir sie weg und schreiben nur M statt $(M, \mathcal{D})$. Insbesondere verstehen wir unter $\mathbb{R}^n$ immer die glatte Mannigfaltigkeit, die mit der üblichen Topologie und der von $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\}$ erzeugten glatten Struktur ausgestattet ist.
- Ist $(M, \mathcal{D})$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge, so erbt U in natürlicher Weise die differenzierbare Struktur
$$\mathcal{D}_U := \{(V, \psi) \in \mathcal{D} \mid V \subseteq U\}.$$

Wir betrachten offene Teilmengen stets als glatte Mannigfaltigkeiten ausgestattet mit dieser Struktur.

Mithilfe differenzierbarer Strukturen definieren wir nun differenzierbare Abbildungen und Diffeomorphismen.

Definition (Differenzierbare Abbildung)**.** Es seien $(M, \mathcal{D})$ und $(N, \mathcal{E})$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *k-mal stetig differenzierbar* oder *C^k-Abbildung*, falls für alle $p \in M$ eine Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ mit $p \in U$ und eine Karte $(V, \psi) \in \mathcal{E}$ mit $f(U) \subseteq V$ existiert, sodass

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

eine C^k-Abbildung ist. Die Menge aller C^k-Abbildungen von M nach N bezeichnen wir mit $C^k(M, N)$. Eine Abbildung $f \in C^k(M, N)$ heißt *C^k-Diffeomorphismus*, falls f bijektiv ist und $f^{-1} \in C^k(N, M)$. Eine C^∞-Abbildung wird auch *glatte Abbildung* genannt.

Zeichnung

Ende 2. Vorlesung

Für die Definition von Differenzierbarkeit benötigt man keine Glattheitsannahme an die differenzierbaren Strukturen. Dies wird jedoch dann notwendig, wenn differenzierbare Funktionen mithilfe des Erzeugerprinzips charakterisiert werden und die Unabhängigkeit der Differenzierbarkeit von der Wahl der Karten gewährleistet sein soll. Wir formulieren die Kriterien hier nur für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^n$, es gilt natürlich auch allgemeiner.

Lemma (Charakterisierung differenzierbarer Funktionen mittels Erzeugerprinzip)**.** *Es sei $(M, \mathcal{D})$ eine C^k-Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{D}$ erzeugender C^k-Atlas. Für eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^n$ und $1 \leq l \leq k$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) $f \in C^l(M, \mathbb{R}^n)$.

(ii) *Für alle $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ ist*

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$$

eine C^l-Abbildung. ('Charakterisierung mittels Erzeuger')

(iii) *Für alle $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ ist*

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$$

eine C^l-Abbildung. ('Unabhängigkeit von der Wahl der Karte')

Beweis. Übung. □

Beispiel ($\mathbb{R}^n$)**.** Das vorige Lemma zeigt, dass die von dem Atlas $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\}$ erzeugte glatte Struktur auf $\mathbb{R}^n$ den üblichen Differenzierbarkeitsbegriff liefert.

Beispiel ($\mathbb{R}$ mit anderen differenzierbaren Strukturen)**.** Für $\alpha > 0$ sei

$$\varphi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|^\alpha.$$

Mit $\mathcal{D}_\alpha$ bezeichnen wir die von der Karte $\{(\mathbb{R}, \varphi_\alpha)\}$ erzeugte glatte Struktur auf $\mathbb{R}$. Für $\alpha \neq \beta$ sind $\mathcal{D}_\alpha$ und $\mathcal{D}_\beta$ verschieden, da φ_α und φ_β in diesem Fall nicht C^∞-verbunden sind. Es ist aber

$$\varphi_\alpha : (\mathbb{R}, \mathcal{D}_\alpha) \to \mathbb{R}$$

ein Diffeomorphismus. Somit unterscheiden sich die differenzierbaren Strukturen $\mathcal{D}_\alpha$ und $\mathcal{D}_\beta$ nicht wesentlich.

Beispiel (Koordinatenfunktionen)**.** Sei $(M, \mathcal{D})$ eine glatte n - Mannigfaltigkeit und $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ eine Karte. Die zugehörigen Koordinatenfunktionen $x^i : U \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$, sind C^∞-Funktionen auf U.

Konvention: Von nun an verwenden wir die Begriffe “Karte” und “Karte aus der differenzierbaren Struktur” synonym. Nur falls wir die Glattheitseigenschaften der Karten hervorheben wollen, schreiben wir glatte Karte für Karten aus der differenzierbaren Struktur.

Im Folgenden schreiben wir $C^\infty(M)$ statt $C^\infty(M, \mathbb{R})$ und bezeichnen mit $C_c^\infty(M)$ die Funktionen aus $C^\infty(M)$ mit kompaktem Träger.

Für den Rest des Kurses betrachten wir nur noch glatte Mannigfaltigkeiten. Dies ist zwar an einigen Stellen nicht zwingend notwendig, erlaubt es uns aber auf das Zählen von Ableitungsordnungen zu verzichten. Insbesondere verwenden wir ab sofort den Begriff Karte als Synonym für Karte aus der glatten Struktur.

4. Parakompaktheit

Bis auf die Koordinatenfunktionen haben wir noch keine weiteren glatten Funktionen auf Mannigfaltigkeiten kennengelernt. Im nächsten Abschnitt zeigen wir deshalb, dass es stets genügend viele glatte Funktionen gibt. Dafür benötigen wir jedoch noch einige topologische Resultate.

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Familie von Teilmengen $\mathcal{C}$ heißt *Überdeckung* von X, falls

$$X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Eine Überdeckung $\mathcal{C}$ von X heißt *lokal endlich*, falls jeder Punkt aus X eine Umgebung hat, die nur endlich viele Mengen aus $\mathcal{C}$ schneidet. Eine Überdeckung $\mathcal{C}'$ mit $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ heißt *Teilüberdeckung* von $\mathcal{C}$. Eine Überdeckung $\mathcal{C}'$ heißt *Verfeinerung* von $\mathcal{C}$, falls für jedes $C' \in \mathcal{C}'$ ein $C \in \mathcal{C}$ existiert, mit $C' \subseteq C$.

Definition (Kompakt und Parakompakt)**.** Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt

(a) *kompakt*, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat,

(b) *parakompakt*, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung hat.

Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so heißt eine Teilmenge $K \subseteq X$ *kompakt*, falls $(K, \mathcal{T}_K)$ kompakt ist. Das ist äquivalent dazu, dass jede bezüglich $\mathcal{T}$ offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält. Es heißt K *präkompakt*, falls $\overline{K}$ kompakt ist.

Theorem (Mannigfaltigkeiten sind parakompakt)**.** *Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Ist $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von M und $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie, so hat $\mathcal{C}$ eine abzählbare lokal endliche Verfeinerung, die aus Mengen von $\mathcal{B}$ besteht. Insbesondere ist jede Mannigfaltigkeit parakompakt.*

Wir beweisen das theorem in mehreren Schritten.

Lemma (Mannigfaltigkeiten sind lokalkompakt)**.** *Jeder Punkt einer Mannigfaltigkeit besitzt eine kompakte Umgebung.*

Beweis. Lokal ist jede Mannigfaltigkeit homöomorph zu offenen Teilmengen eines euklidischen Raumes. In offenen Teilmengen von euklidischen Räumen hat jeder Punkt eine kompakte Umgebung, nämlich eine Kugel von postiven Radius. □

Lemma. *Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine Folge kompakter Teilmengen Mengen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $K_n \subseteq K^\circ_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, welche M überdeckt.*

Beweis. Behauptung: Die Topologie von M hat eine abzählbare Basis aus präkompakten Mengen.

Es sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Basis der Topologie. Es genügt zu zeigen, dass

$$\mathcal{B}' := \{O \in \mathcal{B} \mid O \text{ präkompakt}\}$$

eine Basis der Topologie ist. Wir beweisen, dass für jedes $x \in M$ und jedes offene O ein $U \in \mathcal{B}'$ existiert, mit $x \in U \subseteq O$.

Zu $x \in M$ existiert wegen des vorigen Lemmas eine offene präkompakte Menge U_x mit $x \in U_x$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, gibt es ein $U \in \mathcal{B}$ mit $x \in U \subseteq U_x$. Da Teilmengen präkompakter Mengen präkompakt sind, folgt die gewünschte Aussage. △

Sei nun $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Überdeckung von M mit präkompakten offenen Mengen. Wir defineren die (K_n) rekursiv: Wir setzen

$K_1 := \overline{U_1}$. Sind $K_1, \ldots, K_n$ schon definert, so gibt es wegen der Kompaktheit von K_n ein $k_n \geq n+1$ mit

$$K_n \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_{k_n}.$$

Zeichnung

Wir definieren $K_{n+1} := \overline{U_1} \cup \ldots \cup \overline{U_{k_n}}$. Dann ist K_{n+1} kompakt. Das Innere von K_{n+1} enthält $U_1 \cup \ldots \cup U_{k_n}$ und damit $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$. Weiterhin gilt aufgrund der Wahl von k_n, dass $U_{n+1} \subseteq K_{n+1}$. Deshalb ist die Folge $K_n, n \in \mathbb{N}$, eine Überdeckung von M. □

Beweis. M ist parakompakt: Es seien M, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$ wie im Theorem. Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Überdeckung von M aus kompakten Mengen wie im vorherigen Lemma. Wir setzen $V_n := K_{n+1} \setminus K_n^\circ$ und $W_n := K_{n+2}^\circ \setminus K_{n-1}$. Dann ist V_n eine kompakte Menge, die in der offenen Menge W_n enthalten ist. Weiterhin überdeckt (V_n) die Mannigfaltigkeit M.

Zeichnung.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ fixiert. Für jedes $x \in V_n$ gibt es ein $C_x \in \mathcal{C}$ mit $x \in C_x$. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, gibt es ein $B_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_x \subseteq C_x \cap W_n$. Die Menge $\{B_x \mid x \in V_n\}$ ist eine Überdeckung von V_n und hat wegen der Kompaktheit von V_n eine endliche Teilüberdeckung, welche wir mit $\mathcal{C}_n$ bezeichnen.

Die Menge $\mathcal{C}' := \cup_n \mathcal{C}_n$ ist eine abzählbare Überdeckung von M (da (V_n) eine Überdeckung ist). Nach Konstruktion sind alle Mengen aus $\mathcal{C}_n$ in einer Menge aus $\mathcal{C}$ und in W_n enthalten. Da $W_n \cap W_m = \emptyset$ außer für $n-2 \leq m \leq n+2$ ist also $\mathcal{C}'$ eine lokal endliche Verfeinerung von $\mathcal{C}$. Nach Konstruktion besteht sie nur aus Mengen aus $\mathcal{B}$. □

Ende 3. Vorlesung

Es ist manchmal nützlich nur Karten zu betrachten, deren Bild Kugeln sind. Eine Karte (U, φ) (bzw. ihr Definitionsbereich) heißt *Koordinatenkugel*, falls $\varphi(U)$ eine offene Kugel in $\mathbb{R}^n$ (bezüglich der euklidischen Metrik) ist. Eine Koordinatenkugel (U, φ) heißt regulär, falls es eine weitere Koordinatenkugel (U', φ') gibt, mit $\overline{U} \subseteq U'$ und $\varphi'|_U = \varphi$. Da φ' ein Homöomorphismus ist und auf U mit φ übereinstimmt, gilt $\varphi'(\overline{U}) = \overline{\varphi(U)}$. Da $\overline{\varphi(U)}$ eine abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}^n$ ist, ist U Präkompakt. Für allgemeine Koordinatenkugeln muss dies nicht gelten (Übung).

Das folgende Lemma zeigt, dass es im topologischen Sinne genügend viele glatte Koordinatenkugeln gibt.

Folgerung. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann hat die Topologie von M eine abzählbare Basis aus regulären Koordinatenkugeln.*

Beweis. Die Existenz folgt leicht, indem man den Definitionsbereich glatter Karten verkleinert: Sei $x \in X$ und $V \subseteq M$ offen. Wir konstruieren eine reguläre Koordinatenkugel (U, φ) mit $x \in U \subseteq V$. Es sei (W, ψ)

eine glatte Karte mit $x \in W \subseteq V$. Seien nun K, K' offene Kugeln um $\psi(x)$ mit $K' \subseteq \psi(W)$, sodass K den halben Radius von K' hat. Wir definieren $U := \psi^{-1}(K)$ und $\varphi := \psi|_U$. Die benötigte Fortsetzung ist gegeben durch $U' := \psi^{-1}(K')$ und $\varphi' := \psi|_{U'}$.

Abzählbarkeit: Sei $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie von M. Aufgrund des vorigen Theorems existiert eine abzählbare Verfeinerung $\mathcal{B}'$ von $\mathcal{B}$ mit regulären Koordinatenkugeln, die M überdeckt. Wegen dieser beiden Eigenschaften ist $\mathcal{B}'$ auch eine Basis. □

5. Existenz glatter Funktionen und Zerlegungen der Eins

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Existenz glatter Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften.

Das folgende Beispiel ist DER Prototyp einer glatten Funktion auf $\mathbb{R}$, die ab einer gewissen Stelle verschwindet.

Lemma. *Die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{falls } t \leq 0 \end{cases}$$

ist glatt.

Beweis. Siehe Analysis I. □

Im folgenden Lemma bezeichnen $U_r(x)$ bzw. $B_r(x)$ die offene bzw. abgeschlossene Kugel vom Radius r mit Mittelpunkt x in $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$.

Lemma (Existenz glatter Abschneidefunktionen im $\mathbb{R}^n$)**.** *Es sei $0 < r < R$. Dann gilt:*

(a) Es existiert eine glatte Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $h = 1$ auf dem Intervall $(-\infty, r]$, $0 < h < 1$ auf (r, R) und $h = 0$ auf $[R, \infty)$.

(b) Es existiert eine glatte Funktion $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit $H = 1$ auf $B_r(0)$, $0 < H < 1$ auf $U_R(0) \setminus B_r(0)$ und $H = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)$.

Beweis. (a): Es sei f die Funktion aus dem vorigem Lemma. Dann ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(t) = \frac{f(R-t)}{f(R-t) + f(t-r)}$$

eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften. Beachte, dass für alle t eine der größen $R - t$ oder $t - r$ positiv ist.

(b): Sei h eine Funktion wie aus (a). Dann hat $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $H(x) = h(|x|)$ die gewünschten Eigenschaften. □

Definition (Glatte Zerlegung der Eins)**.** Es sei $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung einer glatten Mannigfaltigkeit M. Eine Familie von glatten Funktionen $(\psi_C)_{C\in\mathcal{C}}$ heißt mit $\mathcal{C}$ verträgliche Zerlegung der Eins, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

(a) Für alle $C \in \mathcal{C}$ gilt $0 \leq \psi_C \leq 1$ auf M.

(b) Für alle $C \in \mathcal{C}$ gilt $\operatorname{supp}\psi_C \subseteq C$.

(c) Die Familie der Träger $(\operatorname{supp}\psi_C)_{C\in\mathcal{C}}$ ist lokal endlich, d.h. jeder Punkt aus M hat eine Umgebung, die nur endlich viele der Träger schneidet.

(d) Für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{C\in\mathcal{C}} \psi_C(x) = 1.$$

Bemerkung. Aufgrund von Eigenschaft (c) sind in der Summe in (d) nur endlich viele Terme von 0 verschieden. Man muss sich daher keine Gedanken um Konvergenz machen.

Theorem (Existenz glatter Zerlegungen der Eins)**.** *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von M. Dann existiert eine mit $\mathcal{C}$ verträgliche Zerlegung der Eins.*

Beweis. Jedes $C \in \mathcal{C}$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit. Daher hat die Topologie von C eine abzählbare Basis $\mathcal{B}_C$ aus regulären Koordinatenkugeln (s.o.). Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{B} := \cup_C \mathcal{B}_C$ eine Basis der Topologie von M ist. Aufgrund des Theorems zur Parakompaktheit hat $\mathcal{B}$ eine abzählbare lokal endliche Verfeinerung $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}$.

Wir konstruieren nun zunächst eine Zerlegung der Eins, die mit (etwas vergrößerten) $U_n, n \in \mathbb{N}$, verträglich ist. Durch umnummerieren erhalten wir am Ende die gewünschte Zerlegung der Eins.

Zeichnung

Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $C_n \in \mathcal{C}$ gewählt mit $U_n \subseteq C_n$. Da U_n eine reguläre Koordinatenkugel in C_n ist, gibt es eine Koordinatenkugel (V_n, φ_n) mit $V_n \subseteq C_n$ und $0 < r_n < R_n$ mit (nach Verschieben) $\varphi_n(V_n) = U_{R_n}(0)$ und $\varphi_n(U_n) = U_{r_n}(0)$. Wir definiren die Funktion $f_n : M \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n := \begin{cases} H_n \circ \varphi_n & \text{auf } V_n \\ 0 & \text{auf } M \setminus \overline{U_n} \end{cases},$$

wobei $H_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist, die auf $U_{r_n}(0)$ strikt positiv ist und sonst verschwindet. Da $H_n \circ \varphi_n = 0$ auf $V_n \setminus \overline{U_n}$, ist f_n wohldefiniert. Weiterhin ist f_n glatt und es gilt $f_n(x) > 0$ genau dann, wenn $x \in U_n$ und damit $\operatorname{supp} f_n = \overline{U_n}$. Wir definieren die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ durch

Zeichnung

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Da die Überdeckung (U_n) lokal endlich ist, sind in jeder Umgebung eines festen Punktes nur endlich viele Summanden von f verschieden von 0. Deshalb ist f glatt. Weiterhin gilt $f > 0$ auf M. Die Funktionen $g_n := f_n/f$ sind ebenfalls glatt und erfüllen $0 \leq g_n \leq 1$, sowie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = 1,\ x \in M.$$

Nun müssen wir die Funktionen noch mit $C \in \mathcal{C}$ labeln. Wir definieren

$$\psi_C := \sum_{n\in\mathbb{N}\,:\,C_n=C} g_n,$$

wobei Summen über leere Indexmenge als 0 interpretiert werden. Es gilt

$$\operatorname{supp}\psi_C = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}\,:\,C_n=C} U_n} \overset{(!)}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}\,:\,C_n=C} \overline{U_n} \subseteq C.$$

Hier haben wir bei (!) die lokale Endlichkeit der Überdeckung verwendet. Es gilt $0 \leq \psi_C \leq 1$ und

$$\sum_{C\in\mathcal{C}} \psi_C(x) = 1,\ x \in M.$$

Da die Überdeckung (U_n) lokal endlich ist, ist auch $(\overline{U_n})$ lokal endlich (!!). Somit ist auch die Überdeckung $(\operatorname{supp}\psi_C)_{C\in\mathcal{C}}$ lokal endlich. ☐

Folgerung (Existenz von Abschneidefunktionen)**.** *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $F \subseteq U$ abgeschlossen. Es gibt eine Funktion $\varphi \in C^\infty(M)$ mit $\varphi = 1$ auf F und* $\operatorname{supp}\varphi \subseteq U$.

Beweis. Wir betrachten die endliche Überdeckung $\{U, M \setminus F\}$ von M. Aufgrund des vorherigen Lemmas existieren Funktionen $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$ mit $\varphi + \psi = 1$ auf M und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq U$, sowie $\operatorname{supp}\psi \subseteq M \setminus F$. Daher gilt $\psi = 0$ auf F, weswegen $\varphi = 1$ auf F. ☐

Eine wichtige Folgerung ist die Fortsetzbarkeit differenzierbarer Abbildungen.

Folgerung (Fortsetzung glatter Funktionen)**.** *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ offen und $F \subseteq U$ abgeschlossen. Für jedes $f \in C^\infty(U)$ existiert ein $f' \in C^\infty(M)$ mit $f' = f$ auf F.*

Beweis. Sei φ eine glatte Abschneidefunktion auf M mit $\varphi = 1$ auf F und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq U$. Wir definieren

$$f' = \begin{cases} f\varphi & \text{auf } U, \\ 0 & \text{auf } M \setminus U. \end{cases}$$

Die Funktion f' ist glatt und hat die gewünschten Eigenschaften. ☐

Ende 4. Vorlesung

6. (Ko-)Tangentialraum und (Ko-)Tangentialbündel

In diesem Abschnitt führen wir den Tangentialraum ein. Er kann als lineare Approximation der Mannigfaltigkeit interpretiert werden.

Definition (Derivation und Tangentialraum)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Eine $\mathbb{R}$-*Derivation im Punkt* $p \in M$ ist eine lineare Abbildung

$$\xi : C^\infty(M) \to \mathbb{R},$$

welche die Produktregel

$$\xi(fg) = f(p)\xi(g) + g(p)\xi(f)$$

für alle $f, g \in C^\infty(M)$ erfüllt. Die Menge aller $\mathbb{R}$-Derivationen im Punkt p wird mit T_pM bezeichnet und heißt *Tangentialraum im Punkt* p.

Durch Punktweise definierte Addition und Multiplikationen mit Skalaren ist der Tangentialraum in natürlicher Weise ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man kann ihn auch als Teilraum des (algebraischen) Dualraumes von $C^\infty(M)$ auffassen.

Beispiel. (Partielle Ableitungen bezüglich lokaler Koordinaten) Sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit und (U, φ) eine Karte mit den Koordinatenfunktionen $x^i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Für $f \in C^\infty(M)$ definieren wir die Funktion $\frac{\partial}{\partial x^i} f : U \to \mathbb{R}$ durch

$$p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} f(p) := \partial_i \left[f \circ \varphi^{-1} \right] (\varphi(p)),$$

wobei ∂_i die übliche partielle Ableitung bezüglich der i-ten Koordinate im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Dann ist

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} f(p)$$

eine $\mathbb{R}$-Derivation in p. Der Zusammenhang zwischen $\frac{\partial}{\partial x^i}$ und der Funktion x^i wird später noch deutlich und die Bezeichnung gerechtfertigt.

Bemerkung (Einsteinsche Summenkonvention)**.** Um Formeln übersichtlicher zu gestalten, verwenden von nun an die Einsteinsche Summenkonvention. Tauchen in einer Formel die gleichen Indizes sowohl oben als auch unten auf, so wird über sie summiert. Sind etwa $e_1, \dots, e_n$ Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum V und $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in \mathbb{R}$, so ist

$$\lambda^i e_i := \sum_{i=1}^n \lambda^i e_i.$$

Wir verwenden untere Indizes für Basisvektoren in V und obere Indizes für Koeffizienten der Basisdarstellung. Im dualen Vektorraum V^* handhaben wir es genau umgekehrt, dort verwenden wir obere Indizes für Basisvektoren und untere Indizes für die Koeffizienten der Basisdarstellung. Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis in V, so ist die zugehörige duale Basis $e^1, \ldots, e^n$ definiert durch

$$e^j(e_i) = \delta_i^j := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Ist $v = v^i e_i \in V$ und $\xi = \xi_j e^j \in V^*$, so gilt

$$\xi(v) = \xi(v^i e_i) = v^i \xi(e_i) = v^i \xi_j e^j(e_i) = v^i \xi_j \delta_i^j = v^i \xi_i.$$

Ist $g : V \times V \to \mathbb{R}$ eine bilineare Abbildung und sind $v = v^i e_i$ und $w = w^j e_j$ Elemente von V, so gilt

$$g(v, w) = g(e_i, e_j) v^i w^j = g_{ij} v^i w^j,$$

wobei $g_{ij} := g(e_i, e_j)$. Die Koeffizienten g_{ij} können als Koeffizienten der Darstellung von g im Raum $V^* \otimes V^*$ bezüglich der Basis $e^i \otimes e^j, i, j = 1, \ldots, n$, verstanden werden.

Theorem (Basis des Tangentialraumes)**.** *Es sei M eine glatte n - Mannigfaltigkeit. Für alle $p \in M$ ist T_pM ein n - dimensionaler Vektorraum. Ist (U, φ) eine Karte mit $p \in U$ und lokalen Koordinatenfunktionen x^i, $i = 1, \ldots, n$, so ist $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p, i = 1, \ldots, n$, eine Basis in T_pM und für alle $\xi \in T_pM$ gilt*

$$\xi = \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \text{ wobei } \xi^i = \xi(x^i).$$

Bemerkung.

- Wir haben die Einsteinsche Summenkonvention bereits in der Formulierung des vorigen Theorems verwendet. Der Index i in $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ zählt hier als unterer Index.
- Der Ausdruck $\xi(x^i)$ macht eigentlich keinen Sinn, da x^i nur auf $U \subseteq M$ und nicht auf ganz M definiert ist. Wir werden aber unten sehen, dass T_pM und T_pU auf natürliche Weise isomorph sind. Dadurch kann eine Derivation in p auf M auch als Derivation in p auf U aufgefasst werden, sodass der Ausdruck $\xi(x^i)$ definiert ist.

Es ist leicht zu sehen, dass die Vektoren $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, $i = 1, \ldots, n$, linear unabhängig sind. Bevor wir nun ihre Vollständigkeit beweisen können, benötigen wir einige Hilfsaussagen.

Lemma (Satz von Taylor auf Mannigfaltigkeiten)**.** *Sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit und sei (U, φ) eine Karte mit lokalen Koordinatenfunktionen x^i, $i = 1, \ldots, n$. Für jedes $p \in U$ existiert eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von p mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $f \in C^\infty(M)$ gibt es Funktionen $h_{ij} \in C^\infty(V)$, sodass für alle $q \in V$ gilt*

$$f(q) = f(p) + (x^i(q) - x^i(p)) \frac{\partial}{\partial x^i} f(p) + (x^i(q) - x^i(p))(x^j(q) - x^j(p)) h_{ij}(q).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Beweis vom Satz von Taylor im mehrdimensionalen angewendet auf die C^∞-Funktion

$$\bar{f} := f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Hier sind die Details. Da Verschiebungen glatte Funktionen sind, nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $\varphi(p) = 0$. Ferner wählen wir eine offene Kugel $U_r(0) \subseteq \varphi(U)$. Für $\bar{x} \in U_r(0)$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{x}) &= \bar{f}(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt}\bar{f}(t\bar{x})\,dt \\ \text{(Kettenregel im } \mathbb{R}^n\text{)} &= \bar{f}(0) + \bar{x}^i \int_0^1 \partial_i \bar{f}(t\bar{x})\,dt \\ &= \bar{f}(0) + \bar{x}^i \bar{h}_i(\bar{x}). \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\bar{x}^i$ die Koordinaten von $\bar{x}$ bezüglich der Standardbasis im $\mathbb{R}^n$ und $\bar{h}_i = \int_0^1 \partial_i f(t\cdot)\,dt$ ist eine glatte Funktion auf $U_r(0)$, welche $\bar{h}_i(0) = \partial_i \bar{f}(0)$ erfüllt. Wenden wir diese Rechnung nun nochmal auf $\bar{h}_i$ statt auf $\bar{f}$ an, so erhalten wir glatte Funktionen $\bar{h}_{ij}$ auf $U_r(0)$ mit $\bar{h}_i = \partial_i \bar{f}(0) + x^j \bar{h}_{ij}$. Nun setzen wir $V := \varphi^{-1}(U_r(0))$ und $h_{ij} := \bar{h}_{ij} \circ \varphi$ und erhalten die gewünschte Aussage. □

Lemma (Derivationen sind lokale Operatoren)**.** *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\xi \in T_pM$. Sind $f, g \in C^\infty(M)$ mit $f = g$ auf einer Umgebung von p, so gilt $\xi(f) = \xi(g)$.*

Beweis. Sei U eine offene Umgebung von p, sodass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in U$ gilt und sei $V \subseteq U$ eine weitere Umgebung von p, mit $\overline{V} \subseteq U$. Wir wählen eine glatte Abschneidefunktion φ mit $\varphi = 1$ auf $\overline{V}$ und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq U$. Es folgt

$$\begin{aligned} \xi(f-g) &= \xi(\varphi(f-g)) + \xi((1-\varphi)(f-g)) \\ &= \xi((1-\varphi)(f-g)) \\ \text{(Produktregel)} &= (1-\varphi(p))\xi(f-g) + (f(p)-g(p))\xi(1-\varphi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität von ξ folgt $\xi(f) = \xi(g)$. □

Lemma. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen. Für $p \in U$ ist die Abbildung*

$$\iota : T_pU \to T_pM,\ \iota(\xi)(f) := \xi(f|_U)$$

ein Vektorraumisomorphismus. Ist (V, φ) eine glatte Karte für M mit $p \in V$, so bildet ι den Vektor $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ (aufgefasst als Derivation auf $C^\infty(U)$ bezüglich der Karte $(U \cap V, \varphi|_U)$) auf den Vektor $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ (aufgefasst als Derivation auf $C^\infty(M)$ bezüglich der Karte (V, φ)) ab.

Beweis. Die Glattheit von Einschränkungen von glatten Funktionen folgt aus der Wahl der differenzierbaren Struktur auf offenen Teilmengen von M. Deshalb ist ι wohldefiniert. Die Injektivität und Surjektivität von ι sind Konsequenzen der Lokalität von Derivationen und der Fortsetzbarkeit von glatten Funktionen (Übung). □

Ende 5. Vorlesung

Beweis. (Theorem über eine Basis des Tangentialraumes). Es sei $p \in M$, (U, φ) eine glatte Karte und $V \subseteq U$ eine relativkompakte offene Umgebung von p, für die der Satz von Taylor (s.o.) gilt. Wegen des vorigen Lemmas genügt es die Aussage für die glatte Mannigfaltigkeit V und die Karte $(V, \varphi|_V)$ zu zeigen. Wir nehmen wieder an, dass $\varphi(p) = 0$ und damit $x^i(p) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, gilt. Ist $f \in C^\infty(V)$ und $\xi \in T_pV$, so zeigen der Satz von Taylor und die Definition von $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, dass

$$\begin{aligned}
\xi(f) &= \xi(f(p)) + \xi(x^i \frac{\partial}{\partial x^i} f(p)) + \xi(x^i x^j h_{ij}) \\
&= \xi(f(p)) + \xi(x^i) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f) + \xi(x^i x^j h_{ij}),
\end{aligned}$$

mit geeigneten $h_{ij} \in C^\infty(V)$. Wegen der Produktregel

$$\xi(1) = \xi(1 \cdot 1) = 1 \cdot \xi(1) + 1 \cdot \xi(1) = 2\xi(1)$$

gilt $\xi(1) = 0$ und damit $\xi(f(p)) = f(p)\xi(1) = 0$. Weiterhin impliziert die Produktregel und die Identität $x^i(p) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, die Gleichung

$$\xi(x^i x^j h_{ij}) = x^i(p)\xi(x^j h_{ij}) + x^j(p) h_{ij}(p)\xi(x^i) = 0.$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung (Funktionenkeime)**.** Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$, so kann man auf $C^\infty(M)$ folgende Äquivalenzrelation einführen:

$$f \sim g :\Leftrightarrow \text{es gilt } f = g \text{ auf einer Umgebung von } p.$$

Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation nennt man glatte Funktionenkeime in p. Die Menge aller glatten Funktionenkeime in p erbt in natürlicher Weise die Struktur einer $\mathbb{R}$-Algebra von $C^\infty(M)$. Ein wesentlicher Schritt im Beweis des vorigen Theorems war es zu zeigen, dass eine Derivation auf $C^\infty(M)$ im Punkt p auch als Derivation auf den Funktionenkeimen in p aufgefasst werden kann.

Bemerkung (Tangentialraum des $\mathbb{R}^n$)**.** Die globale Karte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ liefert eine globale Identifizierung von $\mathbb{R}^n$ mit $T_p\mathbb{R}^n$. Diese ist in gewisser Weise kanonisch (siehe Übung).

Alternativ kann der Tangentialraum auch mittels Äquivalenzklassen von Kurven beschrieben werden. Diese Sichtweise ist zwar besonders anschaulich, aber die Vektorraumstruktur des Tangentialraumes ist bei diesem Zugang nicht sofort ersichtlich.

Es sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Zu einer glatten Kurve $\gamma : I \to M$ und $t \in I$ assoziieren wir die Richtungsableitung

$$\dot{\gamma}(t) : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto (f \circ \gamma)'(t).$$

Die folgende Proposition zeigt, dass der Tangentialraum auch als Raum der Richtungsableitungen von Kurven interpretiert werden kann.

Proposition. *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\gamma : I \to M$ eine glatte Kurve. Für alle $t \in I$ gilt $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$. Ist $p \in M$ gegeben, so ist die Abbildung*

$$\{\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \mid \varepsilon > 0, \gamma \text{ glatt mit } \gamma(0) = p\} \to T_pM$$
$$\gamma \mapsto \dot{\gamma}(0)$$

surjektiv.

Beweis. Übung. □

Es ist natürlich möglich, dass unterschiedliche Kurven dieselbe Derivation auf $C^\infty(M)$ erzeugen. Identifiziert man solche Kurven, so erhält man eine alternative Beschreibung des Tangentialraumes im Punkt p durch Äquivalenzklassen glatter Kurven durch p.

Definition (Kotangentialraum)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Der zu T_pM duale Vektorraum T_pM^* heißt *Kotangentialraum in p*.

Beispiel (Differential einer Funktion)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Das *Differential von $f \in C^\infty(M)$ im Punkt p* ist definiert als

$$df_p : T_pM \to \mathbb{R}, df_p(\xi) := \xi(f).$$

Offensichtlich gehört df_p zum Kotangentialraum im Punkt p. Die Definition des Differentials entspricht ganz der Philosophie, dass die Ableitung die Funktion durch eine lineare Funktion annähert. Identifiziert man den Tangentialraum $T_{f(p)}\mathbb{R}$ mittels der globalen Karte $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ mit $\mathbb{R}$ selbst, so kann das Differential als lineare Abbildung $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$ aufgefasst werden. Es wird also sowohl die Abbildung als auch die Mannigfaltigkeit durch lineare Strukturen approximiert. Diese Konstruktion lässt sich auch auf Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten verallgemeinern (siehe Übung).

Proposition (Basis im Kotangentialraum). *Es sei M eine glatte n-Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Ist (U, φ) eine Karte mit $p \in U$ und lokalen Koordinatenfunktionen x^i, $i = 1, \dots, n$, so ist $dx^i_p, i = 1, \dots, n$, eine Basis in T_pM^*. Sie ist die duale Basis zu $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, $i = 1, \dots, n$. Ist $f \in C^\infty(M)$, so gilt*

$$df_p = \frac{\partial}{\partial x^i} f(p) dx^i_p.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $dx^i_p, i = 1, \dots, n$, die zu $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$, $i = 1, \dots, n$, duale Basis ist. Dazu berechnen wir

$$dx^j_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p \right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p (x^j) = \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)(p) = \delta^j_i.$$

Hier haben wir verwendet, dass $x^j \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ die j-te Koordinatenabbildung auf dem $\mathbb{R}^n$ ist. $\square$

Bisher haben wir Tangentialraum und Kotangentialraum in jedem Punkt separat behandelt. Es liegt natürlich nahe, die (Ko)-Vektorwertigen Funktionen $p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ oder $p \mapsto df_p$ zu betrachten und auf Stetigkeitseigenschaften bzw. Glattheitseigenschaften zu untersuchen. Dazu interpretieren wir sie als (glatte) Schnitte in den folgenden Vektorbündeln.

Definition ((Ko-)Tangentialbündel). Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Die Mengen

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

beziehungsweise

$$TM^* := \bigsqcup_{p \in M} T_pM^* = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM^*$$

heißen *Tangentialbündel* bzw. *Kotangentialbündel*. Mit $\pi : TM \to M$, $(p, \xi) \mapsto p$, bzw. $\pi^* : TM^* \to M$, $(p, v) \mapsto p$, bezeichnen wir die Projektion auf die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit.

Die Fasern $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_pM$ und $(\pi^*)^{-1}(p) = \{p\} \times T_pM^*$ identifizieren wir im Folgenden stets mit T_pM und T_pM^*.

Definition (Vektorfeld und Kovektorfeld). Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $U \subseteq M$ offen. Eine Abbildung $X : U \to TM$, $p \mapsto X_p$ heißt *(lokales) Vektorfeld*, falls $\pi \circ X = \mathrm{id}_U$ (d.h. $X_p \in T_pM$ für alle $p \in U$). Ein Vektorfeld heißt *glatt*, falls für alle $f \in C^\infty(M)$ die Abbildung

$$U \to \mathbb{R},\ p \mapsto X_p(f)$$

glatt ist. Die Menge aller glatten Vektorfelder auf M bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}(M)$.

Eine Abbildung $\omega : U \to TM^*$, $p \mapsto \omega_p$ heißt *(lokales) Kovektorfeld*, falls $\pi^* \circ \omega = \mathrm{id}_U$ (d.h. $\omega_p \in T_pM^*$ für alle $p \in U$). Ein Kovektorfeld heißt *glatt*, falls für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Abbildung

$$U \to \mathbb{R},\ p \mapsto \omega_p(X_p)$$

glatt ist. Die Menge aller glatten Kovektorfelder auf M bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}(M)^*$.

Beispiel. Ist (U, φ) eine glatte Karte, so ist die Abbildung

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \to TM, p \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

ein glattes Vektorfeld und

$$dx^i : U \to TM^*, p \mapsto dx^i_p$$

ein glattes Kovektorfeld.

Bemerkung. Durch punktweise definierte Addition und Skalarenmultiplikation sind die Räume der glatten Vektorfelder $\mathfrak{X}(M)$ und Kovektorfelder $\mathfrak{X}(M)^*$ in natürlicher Weise $\mathbb{R}$-Vektorräume. Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$, so definieren wir

$$f \cdot X : U \to TM,\ p \mapsto f(p)X_p.$$

Es ist fX offensichtlich ein glattes Vektorfeld. In diesem Sinne erhält $\mathfrak{X}(M)$ die Struktur eines $C^\infty(M)$-Moduls.

Ist (U, φ) eine Karte und $X : U \to TM$ ein Vektorfeld, so lässt es sich in lokalen Koordinaten schreiben als

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},\ \text{wobei } X^i : U \to \mathbb{R}, p \mapsto X_p(x^i).$$

Es ist X genau dann glatt, wenn die Funktionen X^i glatt sind (Übung).

Bemerkung (Differenzierbare Struktur auf Tangentialbündel)**.** Es sei $(M, \mathcal{D})$ eine differenzierbare n - Mannigfaltigkeit. Für eine glatte Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ mit lokalen Koordinatenfunktionen x^i, $i = 1, \dots, n$, definieren wir auf TM die Funktion

$$\widetilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, \left(p, \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) \mapsto (\varphi(p), \xi^1, \dots, \xi^n).$$

Statten wir TM mit der von

$$\{\widetilde{\varphi}^{-1}(O) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{D} \text{ und } O \subseteq \mathbb{R}^{2n} \text{ offen}\}$$

erzeugten Topologie $\widetilde{\mathcal{T}}$ (der von den $\widetilde{\varphi}$ induzierten Initialtopologie) aus, so ist $(TM, \widetilde{\mathcal{T}})$ eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit und

$$\{(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{D}\}$$

erzeugt eine glatte Struktur $\widetilde{\mathcal{D}}$ auf TM. Ein lokales Vektorfeld auf M ist genau dann glatt, wenn $X : U \to (TM, \widetilde{\mathcal{D}})$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist (Übung). Ähnliches gilt für das Kotangentialbündel.

Lokal ist das Tangentialbündel (nach Definition der Topologie auf TM) homöomorph zu $O \times \mathbb{R}^n$, wobei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Die globale Topologie der Mannigfaltigkeit TM hängt dagegen stark von M ab und ist sehr interessant.

7. Untermannigfaltigkeiten

Offene Teilmengen einer glatten n - Mannigfaltigkeit erben in natürlicher Weise die Struktur einer glatten n - Mannigfaltigkeit. Für gewisse andere niederdimensionale Teilmengen ist dies auch möglich. Durch diese Prozedur erhalten wir viele (in einem gewissen Sinne alle) wichtige Beispiele.

Definition (Untermannigfaltigkeit)**.** Es sei M eine glatte n - Mannigfaltigkeit und $m \leq n$. Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt *m - dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit*, falls für alle $p \in S$ eine glatte Karte (U, φ) von M mit lokalen Koordinatenfunktionen $x^i : U \to \mathbb{R}$ existiert, mit $p \in U$ und

$$S \cap U = \{q \in U \mid x^{m+1}(q) = \ldots = x^n(q) = 0\}.$$

Eine solche Karte heißt *glatter m-Schnitt für S*.

Zeichnung

Für $m \leq n$ bezeichnen wir mit $\pi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Projektion auf die ersten m Koordinaten, das heißt

$$\pi_m((x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}, \ldots, x^n)) := (x^1, \ldots, x^m).$$

Proposition. *Es seien M eine glatte n - Mannigfaltigkeit und S eine m - dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit. Ausgestattet mit der Unterraumtopologie ist S eine m - Mannigfaltigkeit und die Menge*

$$\mathcal{A}_S = \{(U \cap S, \pi_m \circ \varphi|_{U \cap S}) \mid (U, \varphi) \text{ ist glatter } m\text{-Schnitt für } M\}$$

ist ein C^∞-verbundener Atlas für S.

Beweis. Dieser Beweis kann genauso geführt werden wie der für glatte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, siehe Übung. $\square$

Im Folgenden statten wir eine Untermannigfaltigkeit S von einer gegebenen Mannigfaltigkeit M stets mit der Unterraumtopologie und der von $\mathcal{A}_S$ erzeugten glatten Struktur aus.

Beispiel. Glatte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, siehe Übung. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass jede glatte n - Mannigfaltigkeit zu einer glatten Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n+1}$ diffeomorph ist. Dieses Resultat nennt sich Einbettungssatz von Whitney, siehe [**2**, Theorem 6.15].

Ende 6. Vorlesung

Ist $S \subseteq M$ eine glatte Untermannigfaltigkeit, so kann der Tangentialraum an S als Unterraum des Tangentialraumes an M aufgefasst werden. Für $p \in S$ definieren wir die lineare Abbildung

$$\iota_S : T_pS \to T_pM,\ \iota_S(\xi)(f) := \xi(f|_S).$$

Ist $f : M \to \mathbb{R}$ glatt, so ist $f|_S$ eine glatte Funktion auf S und somit die Abbildung ι_S wohldefiniert. Unter Verwendung von glatten Schnittkoordinaten rechnet man leicht nach, dass ι_S auch injektiv ist. Deshalb identifizieren wir T_pS mit $\iota_S(T_pS) \subseteq T_pM$. In der Interpretation von T_pM durch von glatten Kurven induzierte Derivationen gilt für diese Identifikation

$$T_pS = \{\dot\gamma(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ glatt}, \varepsilon > 0, \gamma(0) = p, \gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq S\}.$$

Für Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ entspricht dies der üblichen geometrische Deutung des Tangentialraumes, wenn der Tangentialraum von $\mathbb{R}^n$ über die globale Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert wird.

Zeichnung

8. Riemannsche Metriken

Bisher haben wir nur (differential-)topologische und keine geometrischen Konzepte kennengelernt. Um Geometrie als das Studium von geometrischen Objekten und ihren Kenngrößen zu betreiben, benötigen wir (mindestens) die Begriffe Länge und Volumen. Wir führen sie mittels riemannscher Metriken auf den Tangentialbündeln ein.

Definition (Riemannsche Metrik)**.** Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *(glatte) riemannsche Metrik* $g = (g(p))_{p\in M}$ auf M ist eine Familie von Skalarprodukten $g(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, sodass für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Abbildung

$$M \to \mathbb{R},\ p \mapsto g(p)(X_p, X_p)$$

glatt ist. Ist g eine riemannsche Metrik auf M, so heißt das Paar (M, g) *riemannsche Mannigfaltigkeit.*

Bemerkung. (a) Eine riemannsche Metrik ist keine Metrik im Sinne eines metrischen Raumes. Wir werden aber später sehen, dass jede riemannsche Metrik eine Metrik, den sogenannten geodätischen Abstand, auf der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit induziert.

(b) Ähnlich beim Tangentialbündel kann man auch dem Bündel aller Bilinearformen auf den Tangentialräumen die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit gegen. Der eben eingeführte Glattheitsbegriff Riemannscher Metriken ist damit kompatibel.

Sind $\xi, \eta \in T_pM$ gegeben, so lassen wir oft den Referenzpunkt und g weg und schreiben nur

$$\langle \xi, \eta \rangle := \langle \xi, \eta \rangle_g := g(p)(\xi, \eta) \text{ und } |\xi| := |\xi|_g := g(p)(\xi, \xi)^{1/2}.$$

In der Basisdarstellung von ξ, η bezüglich den lokalen Koordinaten $x^1, \dots, x^n : U \to \mathbb{R}$ mit $p \in U$ gilt

$$\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij}(p)\xi^i\eta^j,$$

mit

$$g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \rangle.$$

Anders ausgedrückt bedeutet dies

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

wobei

$$dx^i \otimes dx^j(\xi, \eta) := dx^i(\xi) dx^j(\eta).$$

Ähnlich wie für Vektorfelder lässt sich leicht zeigen, dass die Glattheitsforderung an die riemannsche Metrik genau dann erfüllt ist, wenn für alle glatten lokalen Koordinaten (x^i) die zugehörigen Funktionen (g_{ij}) glatt sind.

Beispiel ($\mathbb{R}^n$)**.** Identifiziert man den Tangentialraum von $\mathbb{R}^n$ auf kanonische Weise (mittels der globalen Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$) mit $\mathbb{R}^n$, so induziert das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ eine riemannsche Metrik $g_{\mathbb{R}^n}$. In den Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle \xi, \eta \rangle_{g_{\mathbb{R}^n}} = \delta_{ij}\xi^i\eta^j,$$

wobei $\delta_{ij} = 1$ falls $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ falls $i \neq j$.

Beispiel ($\mathbb{S}^n$ und andere Untermannigfaltigkeiten)**.** Die n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$. Damit ist $T_p\mathbb{S}^n$ ein Unterraum von $T_p\mathbb{R}^{n+1}$. Wir definieren $g_{\mathbb{S}^n}$ als Einschränkung von $g_{\mathbb{R}^{n+1}}$ auf den Unterraum $T_p\mathbb{S}^n$. Das Paar $(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$ ist eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Ähnlich lassen sich riemannsche Metriken von gegebenen Mannigfaltigkeiten auf glatte Untermannigfaltigkeiten einschränken.

Bemerkung. Mittels des Satzes über die Zerlegung der Eins (s.o.) lässt sich leicht zeigen, dass jede glatte Mannigfaltigkeit eine riemannsche Metrik besitzt (Übung).

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gibt es einen durch die Metrik induzierten Isomorphismus

$$^\flat : T_pM \to T_pM^*,\ \xi^\flat(\eta) := \langle \xi, \eta \rangle.$$

In lokalen Koordinaten (x^i) gilt

$$\xi^\flat = \xi^\flat_i dx^i_p = \xi^\flat\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\Big) dx^i_p = \langle \xi, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \rangle\, dx^i_p = g_{ij}(p)\xi^j dx^i_p$$

und somit

$$\xi^\flat_i = g_{ij}(p)\xi^j.$$

Bezüglich der Basen $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\}$ in T_pM und $\{dx^i_p\}$ in T_pM^* wird die lineare Abbildung $^\flat$ also von der Matrix $(g_{ij}(p))^n_{i,j=1}$ dargestellt. Oft lässt man $^\flat$ weg und schreibt nur (ξ_i) statt $(\xi^\flat_i)$ für die Komponenten von $\xi^\flat$. In diesem Sinne operiert $^\flat$ indem es mittels der Metrik Indizes nach unten verschiebt. Die Umkehrabbildung zu $^\flat$ wird mit $^\sharp : T_pM^* \to T_pM$ bezeichnet. In den gegebenen lokalen Koordinaten gilt für $\omega \in T_pM^*$

$$(\omega^\sharp)^i = g^{ij}(p)\omega_j,$$

wobei $(g^{ij}(p))$ die Einträge der zu $(g_{ij}(p))$ inversen Matrix sind. Auch in diesem Fall schreibt man oft nur (ω^i) statt $(\omega^\sharp)^i$ für die Komponenten von $\omega^\sharp$, sodass $^\sharp$ Indizes anhebt. Die Bezeichnungen $^\flat$ und $^\sharp$ stammen aus der Musiktheorie und die Isomorphismen werden auch *musikalische Isomorphismen* genannt. Offensichtlich gilt für $\omega \in T_pM^*$

$$\langle \omega^\sharp, \eta \rangle = (\omega^\sharp)^\flat(\eta) = \omega(\eta).$$

Die für uns wichtigste Anwendung der musikalischen Isomorphismen ist die folgende Definition.

Definition (Gradient)**.** Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M)$. Das glatte Vektorfeld

$$\nabla f := \nabla_g f := (df)^\sharp$$

heißt *Gradient von f*.

In lokalen Koordinaten (x^i) gilt

$$(\nabla f)^i = g^{ij}(df)_j = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j},$$

und somit

$$\nabla f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Weiterhin gilt

$$\langle \nabla f, \xi \rangle = df(\xi) = \xi(f)$$

und

$$|\nabla f|^2 = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Bemerkung (Geometrische Deutung Gradient)**.** (a) Ist $\xi \in T_pM$ und $f \in C^\infty(M)$, so kann $\xi(f)$ als Änderung der Funktion f im Punkt p in Richtung ξ aufgefasst werden. Der Gradient einer Funktion zeigt in Richtung der stärksten Änderung, d.h. für $\eta = |\nabla f|^{-1}\nabla f$ und alle $\xi \in T_pM$ mit $|\xi|_g = 1$ gilt

$$\xi(f) \leq \eta(f).$$

(Denn:

$$\xi(f) = \langle \nabla f, \xi\rangle \leq |\nabla f| = \langle \nabla f, \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f\rangle = \langle \nabla f, \eta\rangle = \eta(f).)$$

Damit man die Richtung der stärksten Änderung überhaupt definieren kann, benötigt man den Begriff der Länge eines Tangentialvektors. Sonst kann man unterschiedliche Richtungen nicht vergleichen.

(b) Es sei (M, g) eine glatte riemannsche n - Mannigfaltigkeit. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $df_p \neq 0$ für alle $p \in M$ und $C \in \operatorname{Bild}(f)$, so ist

$$S := \{x \in M \mid f(x) = C\}$$

eine $(n-1)$ - dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit (verwende eine geeignete Version des Satzes über implizite Funktionen). In jedem Punkt $p \in S$ steht $\nabla f(p)$ senkrecht auf T_pS, d.h. für alle $\xi \in T_pS$ gilt

$$\langle \xi, \nabla f\rangle = 0.$$

(Denn: Sei $\xi \in T_pS$ und $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ glatt mit $\dot\gamma(0) = \xi$. Dann gilt

$$\langle \nabla f, \dot\gamma(0)\rangle = \dot\gamma(0)(f) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\gamma(h)) - f(p)}{h} = 0.)$$

In diesem Sinne steht der Gradient einer Funktion senkrecht auf ihren Konstanzflächen.

Ende 7. Vorlesung

9. Der geodätische Abstand

Auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) kann genügend glatten Kurven eine Länge zugeordnet werden. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : I \to M$ stetig und stückweise glatt (es existieren endlich viele Punkte $t_1, \ldots, t_\ell \in I$, sodass $\gamma : I \setminus \{t_1, \ldots, t_\ell\} \to M$ glatt ist), so definieren wir die *Länge von* γ durch

$$L(\gamma) := \int_{\inf I}^{\sup I} |\dot\gamma(t)| \,\mathrm{d}t.$$

Bei unbeschränktem oder nicht abgeschlossenem Parameterbereich I kann $L(\gamma)$ unendlich sein. Falls das Bild von γ im Kartengebiet einer Karte enthalten ist, gilt in den zugehörigen lokalen Koordinaten

$$L(\gamma) = \int_{\inf I}^{\sup I} \sqrt{g_{ij}(\gamma(t))\dot\gamma(t)^i\dot\gamma(t)^j}\,\mathrm{d}t = \int_{\inf I}^{\sup I} \sqrt{g_{ij}\dot\gamma^i\dot\gamma^j}\,\mathrm{d}t.$$

Konvention: Ähnlich wie bei Karten betrachten wir von nun an nur noch stückweise glatte Kurven und verwenden die Begriffe "Kurve" und "stückweise glatte Kurve" synonym.

Wir sagen eine Kurve $\gamma : [a,b] \to M$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ verbindet die Punkte $x \in M$ und $y \in M$, falls $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Mittels der Länge von Kurven definieren wir den *geodätischen Abstand* $\rho : M \times M \to [0,\infty]$ durch

$$\rho(x,y) := \rho_g(x,y) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma \text{ verbindet } x \text{ und } y\}.$$

Wir verwenden hier die Konvention $\rho(x,y) = \infty$, falls x und y nicht durch eine Kurve verbunden sind, also das Infimum über eine leere Menge gebildet wird.Offensichtlich gilt

(a) $\rho(x,x) = 0$ für alle $x \in M$,

(b) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ für alle $x, y \in M$,

(c) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ für alle $x, y, z \in M$.

Eine Kurve γ, die x und y verbindet und $L(\gamma) = \rho(x,y)$ erfüllt, heißt *Geodäte.*

Bemerkung. In der Regel ist es schwer den geodätischen Abstand und Geodäten (falls sie existieren) genau zu bestimmen.

Beispiel. Auf $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ gilt $\rho_{g_{\mathbb{R}^n}}(x,y) = |x-y|$. Geodäten sind gerade Linien.

Beweis. Da die Gerade, die x und y verbindet, die Länge $|x-y|$ hat, gilt $\rho_{g_{\mathbb{R}^n}}(x,y) \le |x-y|$.

Euklidische Rotationen und Verschiebungen ändern nichts an der Länge von Kurven (!) und am euklidischen Abstand. Deshalb dürfen wir annehmen, dass $x \neq 0 \neq y$ auf einer Gerade durch 0 und $(1,0,\ldots,0)$ liegen. Sei $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ die Standartkarte mit zugehörigen Koordinatenfunktionen x^i, $i = 1,\ldots,n$. Ist $\xi \in T_p\mathbb{R}^n$, so gilt bezüglich dieser Koordinaten

$$|\xi|^2 = (g_{\mathbb{R}^n}(p))_{ij}\xi^i\xi^j = \delta_{ij}\xi^j\xi^j = \sum_i (\xi^i)^2 \ge (\xi^1)^2.$$

Für eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$, die x und y verbindet, erhalten wir damit

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)| dt \geq \int_a^b |(\dot\gamma)^1| dt = \int_a^b \left| \frac{d}{dt}\gamma^1 \right| dt \geq |\gamma^1(b) - \gamma^1(a)|.$$

Da x, y auf einer Gerade durch 0 und $(1, 0, \dots, 0)$ liegen, erhalten wir $|\gamma^1(b) - \gamma^1(a)| = |x - y|$ und die Aussage ist bewiesen. $\square$

Beispiel. Auf offenen konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ stimmt die induzierte geodätische Metrik mit der euklidischen Metrik überein (Übung). Sei $[a,b]$ ein Intervall (aufgefasst als Teilmenge $[a,b] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$) und $M := \mathbb{R}^2 \setminus [a,b] \subseteq \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der von $\mathbb{R}^2$ geerbten riemannschen Metrik g_M. Es ist $\rho_{g_M}(x,y)$ gegeben durch

$$\begin{cases} |x-y| & \text{falls } \overline{xy} \cap [a,b] = \emptyset, \\ \min\{|x-a| + |y-a|, |x-b| + |y-b|\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Übung). Nicht für alle Punkte existieren Geodäten

Zeichnung

Ob ρ den Wert unendlich annimmt oder nicht hängt nur vom topologischen Zusammenhang der Mannigfaltigkeit ab.

Proposition (Wegzusammenhang v.s. topologischer Zusammenhang)**.** *Es sei (M,g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Die folgenden Aussagen sind Äquivalent.*

(i) *M ist topologisch zusammenhängend, das heißt $M = O_1 \cup O_2$ für zwei disjunkte offene Mengen $O_i \subseteq M$ impliziert $O_1 = \emptyset$ oder $O_2 = \emptyset$.*

(ii) *Für alle $x, y \in M$ existieren $a, b \in \mathbb{R}$ und eine stückweise glatte Kurve $\gamma : [a,b] \to M$, die x und y verbindet.*

(iii) *Für alle $x, y \in M$ gilt $\rho(x,y) < \infty$.*

Beweis. (ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Das folgt aus der Definition von ρ durch geeignete Reparametrisierung.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei $x \in M$ gegeben. Man rechnet leicht nach, dass die Mengen

$$O_1 := \{y \in M \mid \text{es existiert eine Kurve, die } x, y \text{ verbindet}\}$$

und $O_2 := M \setminus O_1$ offen sind. Da $x \in O_1$ folgt $M = O_1$, da M topologisch zusammenhängend ist.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Angenommen es existieren nichtleere disjunkte offene Mengen $O_1, O_2 \subseteq M$, mit $M = O_1 \cup O_2$. Wir wählen $x \in O_1$, $y \in O_2$ und eine Kurve $\gamma : [a,b] \to M$, die x und y verbindet. Dann ist $\gamma^{-1}(O_1), \gamma^{-1}(O_2)$

eine disjunkte offene Überdeckung vom Intervall $[a, b]$. Da Intervalle topologisch zusammenhängend sind, folgt $\gamma^{-1}(O_1) = \emptyset$ oder $\gamma^{-1}(O_2) = \emptyset$, ein Widerspruch. $\square$

Definition. Eine riemannsche Mannigfaltigkeit heißt *zusammenhängend*, wenn sei eine der äquivalenten Bedingungen des vorigen Lemmas erfüllt.

Bezeichnung. Ist d eine Metrik auf einer Menge X, so verwenden wir für $r > 0$ und $A \subseteq X$ die Bezeichnungen

$$U_r^d(A) = \{y \in X \mid d(A, y) < r\} \text{ und } B_r^d(A) = \{y \in X \mid d(A, y) \leq r\}.$$

Hier ist $d(A, y) = \inf\{d(z, y) \mid z \in A\}$.

Auf zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeiten ist der geodätische Abstand eine Metrik, die die Topologie der Mannigfaltigkeit induziert.

Theorem. *Es sei (M, g) eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit. Der geodätische Abstand ρ ist eine Metrik, die die Topologie von M erzeugt.*

Lemma. *Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Für alle $p \in M$ existieren eine Karte (U, φ) mit $p \in U$ und $C > 0$, sodass*

$$C^{-1}|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \rho(x, y) \leq C|\varphi(x) - \varphi(y)|$$

für alle $x, y \in U$.

Beweis. Wir wählen eine reguläre Koordinatenkugel (V, φ) (s.o.) mit $p \in V$. Da g ein Skalarprodukt ist, ist die Matrix $(g_{ij}(p))$ für jedes $p \in V$ positiv definit. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $\overline{V} \to \mathbb{R}$, $p \mapsto g_{ij}(p)$ und der Kompaktheit von $\overline{V}$ (hier wird die Regularität verwendet) sind die Matrizen $(g_{ij}(p))$ sogar gleichmäßig positiv definit. Es existiert demnach $C > 0$, sodass

$$C^{-2} \sum_i (\xi^i)^2 \leq g_{ij}(p)\xi^i\xi^j \leq C^2 \sum_i (\xi^i)^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und $p \in V$. Diese Ungleichung bedeutet, dass auf $\varphi(V)$ die von g induzierte und die euklidische riemannsche Metrik äquivalent sind.

Ist $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to \varphi(V), t \mapsto \varphi(x) + t(\varphi(y) - \varphi(x))$ die Gerade, die $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ verbindet, so erhalten wir mittels obiger Abschätzung

$$\rho(x, y) \leq L(\varphi^{-1} \circ \tilde{\gamma}) \leq C|\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Für die untere Abschätzung müssen wir V noch etwas verkleinern. Es sei r der Radius der Kugel $\varphi(V)$ um $\varphi(p)$. Wir definieren $U :=$

Zeichnung.

$\varphi^{-1}(U_{r/3}(\varphi(p)))$. Es sei $\gamma : [a, b] \to M$ eine Kurve, die $x, y \in U$ verbindet. Verlässt die Kurve $\gamma \circ \varphi$ die Kugel $\overline{\varphi(V)}$ nicht, so gilt

$$L(\gamma) \geq C^{-1}|\varphi(x) - \varphi(y)|,$$

da Geraden auf Kugeln den geodätischen Abstand bezüglich der euklidischen Metrik minimieren (siehe Beispiel oben). Verlässt $\gamma \circ \varphi$ die Kugel $\overline{\varphi(V)}$, so bezeichnen wir mit ζ den ersten Punkt auf dem Rand $\partial(\varphi(V))$, den $\gamma \circ \varphi$ trifft und mit η die Einschränkung von γ bis zum Punkt $\gamma(\varphi^{-1}(\zeta))$. Dann liegt $\eta \circ \varphi$ komplett in $\overline{\varphi(V)}$ und wir erhalten aufgrund der Wahl von U und ζ

$$L(\gamma) \geq L(\eta) \geq C^{-1}|\varphi(x) - \zeta| \geq C^{-1}\frac{2}{3}r \geq C^{-1}|\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Das beendet den Beweis. □

Zeichnung.

Ende 8. Vorlesung

Beweis. (Theorem über den geodätischen Abstand). Seien $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Zunächst müssen wir $\rho(x, y) > 0$ zeigen . Wir wählen eine Karte (U, φ) wie im vorigen Lemma mit $x \in U$. Ist $y \in U$, so folgt die Aussage sofort aus dem Lemma. Ist $y \notin U$, so wählen wir eine euklidische Kugel $B_r(\varphi(x)) \subseteq \varphi(U)$ um $\varphi(x)$. Jede Kurve γ, die x und y verbindet, muss den Rand $\partial(\varphi^{-1}(B_r(\varphi(x))) = \varphi^{-1}(\partial B_r(\varphi(x)))$ in einem Punkt z treffen. Es folgt $L(\gamma) \geq \rho(x, z) \geq C^{-1}|\varphi(x) - \varphi(z)| = C^{-1}r$ und somit $\rho(x, y) \geq C^{-1}r > 0$.

Um die Äquivalenz der Topologien zu beweisen muss man zeigen, dass jede offene Teilmenge von M eine ρ-Kugel enthält und umgekehrt jede ρ-Kugel eine offene Menge von M enthält. Dies folgt leicht aus dem vorigen Lemma. □

Bemerkung. Da jede glatte Mannigfaltigkeit eine riemannsche Metrik besitzt, zeigt der Satz, dass die Topologie jeder glatten Mannigfaltigkeit metrisierbar ist.

Lemma. *Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Für alle $r, \delta > 0$ und $x \in M$ gilt*

$$U^\rho_\delta(B^\rho_r(x)) = U^\rho_{r+\delta}(x).$$

Beweis. Die Inklusion $U^\rho_\delta(B^\rho_r(x)) \subseteq U^\rho_{r+\delta}(x)$ folgt leicht aus der Dreiecksungleichung für ρ.

Sei nun $z \in M$ mit $r < \rho(x, z) < r + \delta$ gegeben. Wir konstruieren eine Kurve γ, die x und z verbindet, und $L(\gamma) < r + \delta$ erfüllt.

Es sei

$$\varepsilon := r + \delta - \rho(x, z) > 0.$$

Wir wählen eine Kurve γ, die x und z verbindet und

$$\rho(x,z) > L(\gamma) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Zeichnung.

erfüllt. Es sei ζ der erste Punkt auf γ, mit $\rho(x,\zeta) = r$ (dieser existiert nach dem Zwischenwertsatz) und es sei γ_1 der Anfangsteil von γ, der in ζ endet. Mit γ_2 bezeichnen wir den Rest der Kurve γ. Es gilt $\zeta \in B^\rho_r(x)$ und

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \geq r + L(\gamma_2) \geq r + \rho(z,\zeta).$$

Wäre $z \in M \setminus U^\rho_\delta(B^\rho_r(x))$, so würde $\rho(z,\zeta) \geq \delta$ gelten und damit

$$r + \delta = \rho(x,z) + \varepsilon > L(\gamma) + \frac{\varepsilon}{2} \geq r + \rho(z,\zeta) + \frac{\varepsilon}{2} \geq r + \delta + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dies ist ein Widerspruch. □

Die Vollständigkeit vom metrischen Raum (M,ρ) kann mithilfe von topologischen Eigenschaften charakterisiert werden.

Proposition (Topologische Eigenschaften v.s. Vollständigkeit)**.** *Es sei (M,g) eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) *(M,ρ) ist vollständig.*

(ii) *Alle abgeschlossenen ρ-Kugeln sind kompakt.*

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Jede ρ-Cauchy-Folge ist in einer abgeschlossenen Kugel enthalten und hat demnach eine konvergente Teilfolge. Cauchy-Folgen mit konvergenten Teilfolgen konvergieren.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei $x \in M$ und $I := \{r \geq 0 \mid B^\rho_r(x) \text{ ist kompakt}\}$. Offensichtlich ist I ein Intervall, welches 0 enthält. Wir beweisen, dass I rechts offen und abgeschlossen ist (d.h. offen und abgeschlossen als Teilraum von $[0,\infty)$), also $I = [0,\infty)$ gilt.

I ist offen: Da ρ die Topologie von M erzeugt, sind kleine abgeschlossene ρ-Kugeln kompakt. Sei $r \in I$. Für jedes $y \in B^\rho_r(x)$ existiert demnach $\varepsilon_y > 0$, sodass $B^\rho_{\varepsilon_y}(y)$ kompakt ist. Da $B^\rho_r(x)$ kompakt ist, wird es von endlich vielen zugehörigen offenen Kugeln $U^\rho_{\varepsilon_{y_1}}(y_1), \ldots, U^\rho_{\varepsilon_{y_k}}(y_k)$ überdeckt. Sei nun

Zeichnung

$$A := \bigcup_{i=1}^k B^\rho_{\varepsilon_{y_i}}(y_i)$$

und

$$3\delta := \inf\{\rho(w, M \setminus A) \mid w \in B^\rho_r(x)\}.$$

Da $B^\rho_r(x)$ kompakt und $w \mapsto \rho(w, M\setminus A)$ stetig ist, gilt $\delta > 0$. Mithilfe des vorigen Lemmas erhalten wir

$$B^\rho_{r+\delta}(x) \subseteq U^\rho_{r+2\delta}(x) = U^\rho_{2\delta}(B_r(x)) \subseteq A.$$

Die letzte Inklusion folgt aus der Tatsache $\rho(z,y) \geq 3\delta$ für $z \in M \setminus A$ und $y \in B_r^\rho(x)$. Da A als endliche Vereinigung kompakter Mengen kompakt ist, folgt $r+\delta \in I$ und damit die Offenheit von I.

I ist abgeschlossen: Sei $r > 0$ mit $[0,r) \subseteq I$. Wir zeigen $[0,r] \subseteq I$. Sei (x_n) eine Folge in $B_r^\rho(x)$. Da die Metrik ρ das Infimum über Pfadlängen ist, existiert zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $x_n^m \in B_{r-\frac{1}{m}}(x)$ mit $\rho(x_n, x_n^m) \leq \frac{2}{m}$. Da die Kugeln $B_{r-\frac{1}{m}}(x)$ nach Voraussetzung kompakt sind, können wir mithilfe eines geeigneten Diagonalfolgenarguments Indizes n_k finden, sodass für jedes m die Folge $(x_{n_k}^m)_k$ konvergiert. Dann ist (x_{n_k}) eine Cauchy-Folge, da

Zeichnung

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \rho(x_{n_k}, x_{n_k}^m) + \rho(x_{n_k}^m, x_{n_l}^m) + \rho(x_{n_l}^m, x_{n_l}) \leq \frac{4}{m} + \rho(x_{n_k}^m, x_{n_l}^m).$$

Wegen der Vollständigkeit von (M,ρ) ist (x_{n_k}) konvergent. Demnach ist $B_r^\rho(x)$ kompakt. □

Bemerkung. Die Charakterisierung von Vollständigkeit über die Kompaktheit der Bälle gilt allgemein in lokal kompakten metrischen Räumen, deren Metrik durch die Länge von Kurven induziert ist. Diese Aussage ist auch als Satz von Hopf-Rinow bekannt.

Ende 9. Vorlesung

10. Das riemannsche Volumen

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff des Volumens von Teilmengen einer riemannschen Mannigfaltigkeit ein. Wir werden es mithilfe des Lebesgue-Maßes auf Kartengebieten definieren. Dazu betrachten wir zunächst eine Transformationsformel für die Matrixdarstellung der riemannschen Metrik.

Es sei (M,g) eine riemannsche n-Mannigfaltigkeit und (U,φ) bzw. (V,ψ) Karten mit lokalen Koordinatenfunktionen (x^i) bzw. (y^j). Die Ableitung des Koordinatenwechsels $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ im Punkt $\varphi(p)$ bezeichnen wir mit $J(p) \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n)$. Für die Matrixdarstellung von J in Standardkoordinaten (Jacobimatrix) gilt

$$\begin{aligned} J_i^k(p) &:= \partial_i \left[\psi \circ \varphi^{-1}\right]^k (\varphi(p)) \\ &= \partial_i \left[y^k \circ \varphi^{-1}\right] (\varphi(p)) \\ &= \frac{\partial y^k}{\partial x^i}(p). \end{aligned}$$

Dabei ist k der Zeilenindex und i der Spaltenindex der Matrix (J_i^k). Im folgenden Lemma bezeichnet g^φ die Matrixdarstellung von g bezüglich (U,φ) und g^ψ die Matrixdarstellung von g bezüglich (V,ψ).

Lemma (Transformationsformel riemannsche Metrik)**.** *Auf $U \cap V$ gilt*

$$g^\varphi = J^T g^\psi J.$$

Hier bezeichnet J^T die zu J transponierte Matrix.

Beweis. Wir kennen bereits die Basistransformation

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} = J_i^k \frac{\partial}{\partial y^k}.$$

Die Definition von g^φ und g^ψ liefert nun

$$g_{ij}^\varphi = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle_g = J_i^k J_j^l \langle \frac{\partial}{\partial y^k}, \frac{\partial}{\partial y^l} \rangle_g = J_i^k g_{kl}^\psi J_j^l = (J^T g^\psi J)_{ij}.$$

Das beendet den Beweis. □

Theorem (Existenz und Eindeutigkeit riemannsches Volumen)**.** *Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Auf der Borel-σ-Algebra von M existiert ein eindeutiges Maß $\mathrm{vol_g}$, sodass für alle glatten Karten (U, φ) und alle Borel-messbaren $A \subseteq U$ gilt*

$$\mathrm{vol}_g(A) = \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij} \circ \varphi^{-1})} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Hier ist (g_{ij}) die Matrixdarstellung von g bezüglich (U, φ) und λ das Lebesgue-Maß auf $\varphi(U)$. Für alle kompakten $K \subseteq M$ gilt $\mathrm{vol}_g(K) < \infty$.

Beweis. Existenz im Kartenbereich: Ist (U, φ) eine Karte und $A \subseteq M$ eine Borelmenge, so definieren wir μ_U durch

$$\mu_U(A) := \int_{\varphi(A \cap U)} \sqrt{\det(g_{ij} \circ \varphi^{-1})} \, \mathrm{d}\lambda$$

ein Maß auf der Borel-σ-Algebra von M (beachte dass Homöomorphismen Borelmengen auf Borelmengen abbilden).

Verträglichkeit der μ_U: Seien (U, φ), (V, ψ) Karten und $A \subseteq U \cap V$ eine Borel-Menge. Wir zeigen $\mu_U(A) = \mu_V(A)$. Wir setzen $\Phi := \psi \circ \varphi^{-1}$: $\varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$. Mit der Notation aus dem vorigen Lemma gilt $D\Phi(\varphi(p)) = J(p)$ und

$$\det(g_{ij}^\varphi(p)) = |\det J(p)|^2 \det(g_{ij}^\psi(p)).$$

Der Transformationssatz für das Lebesgue-Maß liefert

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi} \circ \psi^{-1})}\, \mathrm{d}\lambda &= \int_{\Phi(\varphi(A))} \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi} \circ \psi^{-1})}\, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \Phi)}\, |\det D\Phi|\, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi} \circ \varphi^{-1})}\, |\det D\Phi|\, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^{\psi} \circ \varphi^{-1})}\, |\det J \circ \varphi^{-1}|\, \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det(g_{ij}^{\varphi} \circ \varphi^{-1})}\, \mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Verträglichkeit der μ_U.

Existenz auf ganz M: Es sei $(U_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein abzählbarer Atlas von M und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine mit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verträgliche Zerlegung der Eins. Für eine Borelmenge A definieren wir

Zeichnung

$$\mathrm{vol}_g(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n d\mu_{U_n}.$$

Offensichtlich ist vol_g ein Maß. Ist (U, φ) eine Karte und $A \subseteq U$ eine Borelmenge, so gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_g(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n d\mu_{U_n} \\
(A \subseteq U) \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A\cap U} \psi_n d\mu_{U_n} \\
(\text{Verträglichkeit der } \mu_U) \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A\cap U} \psi_n d\mu_U \\
(\sum_n \psi_n = 1,\ \text{Beppo-Levi}) &= \mu_U(A).
\end{aligned}$$

Demnach hat vol_g die gewünschte Koordinatendarstellung.

Eindeutigkeit: Die Eindeutigkeit folgt mit einer ähnlichen Rechnung wie eben. Seien (U_n, φ_n) und ψ_n wie oben und sei μ ein weiteres Maß, welches für alle Karten (U, φ) und Borelmengen $A \subseteq U$ die Gleichung

$\mu(A) = \mu_U(A)$ erfüllt. Für jede Borelmenge gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_g(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n d\mu_{U_n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A\cap U_n} \psi_n d\mu_{U_n} \\
(\mu = \mu_{U_n} \text{ auf } U_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A\cap U_n} \psi_n d\mu \\
(\operatorname{supp} \psi_n \subseteq U_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n d\mu \\
(\sum_n \psi_n = 1, \text{ Beppo-Levi}) &= \mu(A).
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Die Idee, ein Borel-Maß auf einer Mannigfaltigkeit durch eine geeignete Wahl von Dichten bezüglich des Lebesgue-Maßes in den Kartendarstellungen zu definieren, ist natürlich. Man muss nur sicherstellen, dass die Dichten kompatibel mit Kartenwechseln sind. Unserer Wahl liegt folgende Beobachtung zugrunde. Ist (S, g_S) eine glatte Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ mit induzierter riemannscher Metrik, so ist vol_{g_S} das aus den Analysisvorlesungen bekannte Oberflächenmaß auf S (Übung). Dessen Definition wiederum lässt sich heuristisch aus dem Transformationsverhalten des Volumens von Würfeln unter linearen Transformationen und einem Approximationsargument herleiten.

11. Transformationen riemannscher Metriken

In diesem Abschnitt diskutieren wir kurz den Isomoprhismusbegriff für riemannsche Mannigfaltigkeiten.

Definition (Ableitung)**.** Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $F : M \to N$ glatt. Die *Ableitung von F im Punkt $p \in M$* ist die lineare Abbildung

$$DF(p) : T_pM \to T_{F(p)}N,\ \xi \mapsto [f \mapsto \xi(f \circ F)].$$

Statt $DF(p)$ schreibt man auch kurz $F_*(p)$ und nennt die induzierte Abbildung $F_* : TM \to TN$ *Pushforward.*

Bemerkung.

- Das oben schon eingeführte Differential ist die Ableitung einer reellwertigen Funktion.
- Um Ableitungen von Funktionen auf Mannigfaltigkeit zu definieren, muss man nicht nur die Funktion sondern auch den Raum linearisieren.

- Identifiziert man die Tangentialräume des $\mathbb{R}^n$ über die globale Karte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$ mit $\mathbb{R}^n$, so liefert der oben eingeführte Begriff der Ableitung den üblichen Begriff der Fréchet-Ableitung (Übung).
- Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathrm{id}_M : M \to M$ die Identitätsabbildung, so gilt $D\mathrm{id}_M(p) = \mathrm{id}_{T_pM}$.

Lemma (Kettenregel)**.** *Es seien M, N, L glatte Mannigfaltigkeiten und $F : N \to M$ und $G : M \to L$ glatte Funktionen. Es ist $G \circ F$ glatt und für alle $p \in M$ gilt*

$$D(G \circ F)(p) = D(G)(F(p)) \circ D(F)(p).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus den Definitionen. □

Definition (Pullbackmetrik)**.** Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, (N, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $F : M \to N$ glatt. Die Familie von Bilinearformen $F^*g = (F^*g(p))_{p\in M}$, welche durch

$$F^*g(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},\ (\xi, \eta) \mapsto g(F(p))(F_*(p)\xi, F_*(p)\eta)$$

gegeben ist, heißt *Pullback von g*.

Bemerkung.

- Im Allgemeinen ist der Pullback einer riemannschen Metrik keine riemannsche Metrik, die Bilinearformen können ausgeartet sein. Tatsächlich ist F^*g genau dann eine riemannsche Metrik, wenn $F_*(p)$ in jedem Punkt $p \in M$ injektiv ist. In diesem Fall heißt F Immersion. Aufgrund der Kettenregel sind alle Diffeomorphismen Immersionen, ihre Ableitungen sind Vektorraumisomorphismen (Übung).
- Ist S eine glatte Untermannigfaltigkeit von (M, g), so ist die Inklusionsabbildung $\iota : S \to M, x \mapsto x$ eine glatte Immersion. Die Einschränkung von g auf TS ist gegeben durch ι^*g (Übung).
- Für den Pullback der Metrik gilt dann

  $$F^*g = g(F_*\cdot, F_*\cdot).$$

  In diesem Sinn sind Pullback und Pushforward duale Operationen.
- Man kann natürlich auch beliebige Bilinearformen auf TN mit dem Pullback zurückziehen.

Definition (Riemannsche Isometrie)**.** Es seien (M, g_M) und (N, g_N) riemannsche Mannigfaltigkeiten. Ein Diffeomorphismus $F : M \to N$ heißt *riemannsche Isometrie*, falls $F^*g_N = g_M$. In diesem Fall heißen (M, g_M) und (N, g_N) *isometrisch Isomorph*

Bemerkung. Jede riemannsche Isometrie $F : M \to N$ ist auch eine Isometrie der Metrischen Räume (M, ρ_{g_M}) und (N, ρ_{g_N}) (Übung), d.h. es gilt

$$\rho_{g_M}(x, y) = \rho_{g_N}(F(x), F(y)).$$

Tatsächlich gilt auch die Umkehrung dieser Aussage und ist bekannt als Satz von Myers-Steenrod. Jede metrische Isometrie $F : (M, \rho_{g_M}) \to (N, \rho_{g_N})$ ist automatisch eine riemannsche Isometrie, siehe [**4, 5**]. Dies ist besonders bemerkenswert, da an metrische Isometrien zunächst keine Glattheitsanforderungen gestellt werden.

Bemerkung. Nach einem tiefen Satz von John Nash ist jede riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n isometrisch Isomorph zu einer Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{2n+1}$ (ausgestattet mit der Standartmetrik).

Ende 10. Vorlesung

12. Beispiele - Modellmannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt behandeln wir Beispielklassen von Mannigfaltigkeiten, für die man alle eingeführten Größen recht explizit berechnen kann.

Seien $(X, \mathcal{D}_X)$ und $(Y, \mathcal{D}_Y)$ glatte Mannigfaltigkeiten. Wir statten das Produkt $M := X \times Y$ mit der Produkttopologie und der von

$$\{((\varphi, \psi), U \times V) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{D}_X \text{ und } (V, \psi) \in \mathcal{D}_Y\}$$

erzeugten glatten Struktur $\mathcal{D}_M$ aus. Die glatte Mannigfaltigkeit $(M, \mathcal{D}_M)$ heißt *kartesisches Produkt* von $(X, \mathcal{D}_X)$ und $(Y, \mathcal{D}_Y)$. Ist $y \in Y$ gegeben, so erzeugt jede Derivation $\xi_x \in T_xX$ eine Derivation $\xi_{x,y} \in T_{(x,y)}M$ durch

$$\xi_{x,y}(f) := \xi_x(f(\cdot, y)).$$

Die Abbildung $T_xX \to T_{(x,y)}M$, $\xi_x \mapsto \xi_{x,y}$ ist linear und injektiv. In diesem Sinne kann T_xX als Unterraum von $T_{(x,y)}M$ aufgefasst werden. Analog erhält man zu gegebenen $x \in X$ eine Abbildung $T_yY \to T_{(x,y)}M, \eta_y \mapsto \eta_{x,y}$. Der Tangentialraum an das Produkt ist die direkte Summe dieser beiden Unterräume

$$T_{(x,y)}M = T_xX \oplus T_yY.$$

Zu jedem Vektor $\xi \in T_{(x,y)}M$ existieren also eindeutige $\xi_X \in T_xX$ und $\xi_Y \in T_yY$ (hier sind die Räume aufgefasst als Unterräume von $T_{(x,y)}M$) mit $\xi = \xi_X + \xi_Y$. Es gilt $\xi_X(f) = \xi(f(\cdot, y))$ und $\xi_Y(f) = \xi(f(x, \cdot))$.

Ist g_X eine riemannsche Metrik auf X und g_Y eine riemannsche Metrik auf Y, so definieren wir für $\xi, \eta \in T_{(x,y)}M$

$$(g_X \oplus g_Y)((x, y))(\xi, \eta) := g_X(x)(\xi_X, \eta_X) + g_Y(y)(\xi_Y, \eta_Y).$$

Die riemannsche Mannigfaltigkeit $(M, g_X \oplus g_Y)$ heißt *riemannsches Produkt* von (X, g_X) und (Y, g_Y).

Ist $\psi : X \to (0, \infty)$ eine glatte Funktion, so kann man auch die riemannsche Metrik

$$(g_X \oplus_\psi g_Y)((x, y))(\xi, \eta) := g_X(x)(\xi_X, \eta_X) + \psi^2(x) g_Y(y)(\xi_Y, \eta_Y)$$

betrachten. In diesem Fall heißt $(M, g_X \oplus_\psi g_Y)$ *verzerrtes Produkt (Warpprodukt)* von (X, g_X) und (Y, g_Y). Ist klar welche Metriken betrachtet werden, so schreibt man auch kurz $X \otimes Y$ für das riemannsche Produkt und $X \otimes_\psi Y$ für das Warpprodukt von (X, g_X) und (Y, g_Y).

Bemerkung. Der Exponent zwei bei ψ^2 wird beim Warpprodukt aus Skalierungsgründen gewählt.

Viele bekannte Beispiele sind Warpprodukte (oder lokal Warpprodukte). Dies diskutieren wir nun anhand von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{S}^n$.

Proposition (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$)**.** *Die Abbildung*

$$\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1},\ x \mapsto (r(x), \theta(x)),$$

mit $r(x) = |x|$ und $\theta(x) = |x|^{-1}x$ ist eine riemannsche Isometrie der Mannigfaltigkeiten $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $(0, \infty) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1}$, wobei $\psi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\psi(r) = r$.

Beweis. Offensichtlich ist Φ ein Diffeomorphismus. Es seien (x^i) die Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^n$ und

$$\pi^i : (0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}, \pi^i((\bar{x}^0, \ldots, \bar{x}^n)) := \bar{x}^i.$$

Wir setzen $r := \pi^0 \circ \Phi$ und $f^i := \pi^i \circ \Phi$, und erhalten

$$x^i = r f^i \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Die Produktregel für das Differential liefert

$$dx^i = f^i dr + r df^i.$$

Quadrieren dieser Gleichung (bezüglich des Tensorproduktes für Kovektoren) impliziert

$$(dx^i)^2 = (f^i)^2 (dr)^2 + (r dr)(f^i df^i) + (f^i df^i)(r dr) + r^2 (df^i)^2.$$

Differenzieren der Gleichung

$$\sum_{i=1}^n (f^i)^2 = 1$$

zeigt

$$\sum_{i=1}^n f^i df^i = 0.$$

Unter Verwendung dieser Identitäten und der Gleichung für $(dx^i)^2$ erhalten wir

$$g_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 = (dr)^2 + r^2 \sum_{i=1}^n (df^i)^2.$$

Für $\xi \in T_x\mathbb{R}^n$ gilt

$$dr(\xi) = \xi(r) = \xi(\pi^0 \circ \Phi) = d\pi^0(\Phi_* \xi)$$

und damit $(dr)^2 = \Phi^*(d\pi^0)^2$. Ferner gilt

$$df^i(\xi) = \xi(f^i) = \xi(\pi^i \circ \Phi) = d\pi^i(\Phi_* \xi)$$

und deshalb $(df^i)^2 = \Phi^*(d\pi^i)^2$. Aus diesen beiden Rechnungen und den Identitäten oben erhalten wir

$$g_{\mathbb{R}^n} = \Phi^* \underbrace{\left((d\pi^0)^2 + (\pi^0)^2 \sum_{i=1}^n (d\pi^i)^2 \right)}_{=:g}.$$

Wir müssen noch zeigen, dass g das entsprechende Warpprodukt ist. Sei dazu $\xi \in T_{(\rho,\vartheta)}(0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ gegeben. Wir zerlegen es eindeutig als $\xi = \xi_\rho + \xi_\vartheta$ mit $\xi_\rho \in T_\rho(0,\infty)$ und $\xi_\vartheta \in T_\vartheta \mathbb{S}^{n-1}$. Nach der Diskussion am Anfang des Kapitels gilt

$$\xi_\vartheta(f) = \xi(f(\rho,\cdot)) \text{ und } \xi_\rho(f) = \xi(f(\cdot,\vartheta)).$$

Es folgt

$$d\pi^0(\xi_\vartheta) = \xi_\vartheta(\pi_0) = \xi(\pi_0(\rho,\cdot)) = \xi(\rho) = 0$$

und analog

$$d\pi^i(\xi_\rho) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Insbesondere sind die Unterräume $T_\rho(0,\infty)$ und $T_\vartheta\mathbb{S}^{n-1}$ orthogonal bezüglich g. Es folgt

$$\begin{aligned} g((\rho,\vartheta))(\xi,\eta) &= d\pi_0(\xi_\rho) d\pi_0(\eta_\rho) + \pi_0((\rho,\vartheta))^2 \sum_{i=1}^n d\pi_i(\xi_\vartheta) d\pi_i(\eta_\vartheta) \\ &= d\pi_0(\xi_\rho) d\pi_0(\eta_\rho) + \rho^2 \sum_{i=1}^n d\pi_i(\xi_\vartheta) d\pi_i(\eta_\vartheta). \end{aligned}$$

Dementsprechend ist die Metrik g das Warpprodukt der Einschränkung von $(d\pi^0)^2$ auf $T_\rho(0,\infty)$ und der Einschränkung von $\sum_{i=1}^n (d\pi^i)^2$ auf $T\mathbb{S}^{n-1}$ bezüglich der Funktion $\psi(r) = r$.

Bei fester Winkelkoordinate ϑ ist die Funktion $\pi^0(\cdot,\vartheta)$ die Identitätsabbildung. Demnach entspricht der Summand $(d\pi^0)^2$ der Standardmetrik auf $(0,\infty)$. Bei festem Radius ρ sind die Funktionen $\pi^i(\rho,\cdot)$, $i = 1,\dots,n$, die Einschränkungen der Standardkoordinaten des $\mathbb{R}^n$. Also entspricht $\sum_{i=1}^n (d\pi^i)^2$ der Einschränkung der Metrik $\sum_{i=1}^n (dx^i)^2$ auf $T\mathbb{S}^n$. Dies ist aber genau die Standardmetrik der Sphäre.

Genauer: Es ist $\mathbb{S}^n$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ und damit $T_\vartheta\mathbb{S}^n$ ein Unterraum von $T_\vartheta\mathbb{R}^n$. Wir schreiben nun $\xi_\vartheta \in T_\vartheta\mathbb{S}^n$ in der Basis bezüglich der kanonischen Koordinaten des $\mathbb{R}^n$ als

$$\xi_\vartheta = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Für den zugehörigen Vektor $\xi_{\rho,\vartheta} \in T_{(\rho,\vartheta)}(0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ gilt (s.o.)

$$g(\xi_{\rho,\vartheta}, \xi_{\rho,\vartheta}) = \xi^k \xi^l \sum_{i=1}^n d\pi^i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_{\rho,\vartheta} \right) d\pi^i \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^l} \right)_{\rho,\vartheta} \right),$$

wobei

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\rho,\vartheta} \in T_{(\rho,\vartheta)}(0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$$

der von $\frac{\partial}{\partial x^i}$ induzierte Vektor ist. Es gilt

$$d\pi^j \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\rho,\vartheta} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\rho,\vartheta} (\pi^j) = \frac{\partial}{\partial x^i} (\pi^j(\rho, \cdot)) = \delta_{ij}.$$

Mit der Rechnung oben folgt also $g(\xi_\vartheta, \xi_\vartheta) = \delta_{kl}\xi^k\eta^l$. Dies entspricht der Standarmetrik im $\mathbb{R}^n$ und damit der Standartmetrik auf der Sphäre. Analog sieht man, dass $(d\pi^0)^2$ der Standardmetrik auf $(0,\infty)$ entspricht. Das beendet den Beweis. $\square$

Bemerkung.

- In der Literatur schreibt man für das obige Resultat verkürzt

$$g_{\mathbb{R}^n} = (dr)^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

- Die gleiche Rechnung funktioniert natürlich auch mit offenen Kugeln statt $\mathbb{R}^n$.

Polarkoordinaten können auch auf der Sphäre eingeführt werden. Sei dazu $n = (0,\ldots,0,1) \in \mathbb{S}^n$ der Nordpol und $s = -n \in \mathbb{S}^n$ der Südpol der Sphäre. Für $x = (x^1,\ldots,x^{n+1}) \in \mathbb{S}^n \setminus \{n,s\}$ definieren wir zwei Werte $r(x) \in (0,\pi)$ und $\theta(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$ durch

$$\cos r(x) = x^{n+1} \text{ und } \theta(x) = |x'|^{-1}x',$$

wobei $x' = (x^1,\ldots,x^n)$. Die folgende Proposition lässt sich ähnlich wie oben beweisen (Übung). Zeichnung

Proposition (Polarkoordinaten für $\mathbb{S}^n$)**.** *Die Abbildung*

$$\mathbb{S}^n \setminus \{n,s\} \to (0,\pi) \times \mathbb{S}^{n-1},\ x \mapsto (r(x), \theta(x))$$

ist eine riemannsche Isometrie der riemannschen Mannigfaltigkeiten $\mathbb{S}^n \setminus \{n,s\}$ *und* $(0,\pi) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1}$*, mit* $\psi : (0,\pi) \to \mathbb{R}, \psi(r) = \sin r$.

Bemerkung. Das Resultat schreibt man verkürzt

$$g_{\mathbb{S}^n} = (dr)^2 + \sin^2 r\, g_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Ende 11. Vorlesung

In der folgenden Definition bezeichnet U_R die euklidische Kugel vom Radius R um den Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$.

Definition (Modellmannigfaltigkeiten)**.** Wir nennen eine n-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) *riemannsches Modell*, falls es ein $R \in (0, \infty]$ und eine glatte Abbildung $\psi : (0, R) \to (0, \infty)$ gibt, sodass $M = U_R$ und die Abbildung

Zeichnung

$$\Phi : M \setminus \{0\} \to (0, R) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1},\ x \mapsto (|x|, |x|^{-1}x)$$

eine riemannsche Isometrie ist. Die Funktion ψ heißt *Skalierungsfunktion des Modells.*

Bemerkung. (a) Der $\mathbb{R}^n$ ist ein Modell vom Radius $R = \infty$ und $\mathbb{S}^n \setminus \{s\}$ ist ein Modell vom Radius π (wenn man $\mathbb{S}^n \setminus \{s\}$ mit U_π identifiziert).

(b) Die Definition kann auch wiefolgt verstanden werden. Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit $M = U_R$ und $\psi : (0, R) \to (0, \infty)$ glatt. Sind $\tilde{\theta}^1, \dots, \tilde{\theta}^{n-1}$ lokale Koordinaten von $\mathbb{S}^{n-1}$ und ist $r : U_R \to \mathbb{R}$, $r(x) = |x|$, so sind $(r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ mit $\theta^i(x) = \tilde{\theta}^i(|x|^{-1}x)$ lokale Koordinaten von $M \setminus \{0\}$. Es sei $p \in M$, $\rho = |p|$ und $\vartheta = |p|^{-1}p$. Zu gegebenen $\xi \in T_pM$ mit

$$\xi = \xi^r \frac{\partial}{\partial r} + \xi^i \frac{\partial}{\partial \theta^i}$$

assoziieren wir den Vektor $\xi_{\mathbb{S}^{n-1}} \in T_\theta \mathbb{S}^{n-1}$ gegeben durch

$$\xi_{\mathbb{S}^{n-1}} = \xi^i \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}^i}.$$

Diese ist tatsächlich unabhängig von der Wahl von $\tilde{\theta}^1, \dots, \tilde{\theta}^{n-1}$.

Es ist M genau dann eine Modellmannigfaltigkeit vom Radius R mit Skalierungsfunktion ψ, falls für alle $p \in M \setminus \{0\}$ und alle $\xi, \eta \in T_pM$ gilt

$$\begin{aligned} g(p)(\xi, \eta) &= \xi^r \eta^r + \psi(\rho)^2 g_{\mathbb{S}^n}(\vartheta)(\xi_{\mathbb{S}^{n-1}}, \eta_{\mathbb{S}^{n-1}}) \\ &= \xi^r \eta^r + \psi(\rho)^2 g_{\mathbb{S}^n}(\vartheta)_{ij} \xi^i \eta^j. \end{aligned}$$

Deswegen schreibt man in diesem Fall oft $g = (dr)^2 + \psi(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$.

Für $0 < R \leq \infty$ seien $r : U_R \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ und $f_i : U_R \to \mathbb{R}$, $x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i/|x|$ wie im Beweis über die Polarkoordinatendarstellung des $\mathbb{R}^n$ oben.

Lemma. *Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Es ist (M, g) genau dann ein n-dimensionales Modell vom Radius $R > 0$, wenn es* *ein glattes* $\psi : (0, R) \to (0, \infty)$ *gibt, mit* $M = U_R$ *und*

$$g = (dr)^2 + \psi(r)^2 \sum_{i=1}^{n} (df^i)^2 \text{ auf } U_R \setminus \{0\}.$$

Beweis. Das haben wir schon im Beweis der Tatsache, dass $\mathbb{R}^n$ eine Modellmannigfaltigkeit ist, gesehen. □

Proposition (Existenz von Modellen)**.** *Es sei* $R > 0$ *und* $\psi \in C^\infty([0, R))$ *(es lassen sich alle Ableitungen stetig in* 0 *fortsetzen) mit* $\psi(r) > 0$ *für* $r > 0$*. Es gibt genau dann ein riemannsches Modell vom Radius* R *mit Skalierungsfunktion* ψ*, wenn*

$$\psi(0) = 0,\ \psi'(0) = 1 \text{ und } \psi^{(2n)}(0) = 0, n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Aufgrund des vorigen Lemmas genügt es zu untersuchen, wann sich die Metrik

$$g_\psi := (dr)^2 + \psi(r)^2 \sum_{i=1}^{n} (df^i)^2 \text{ auf } U_R \setminus \{0\}$$

glatt in 0 fortsetzen lässt. Es sei $\mathrm{id} : U_R \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$ die Standartkarte mit Standartkoordinaten $(x^1, \ldots, x^n)$. Man kann leicht nachrechnen (Übung), dass für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in U_R \setminus \{0\}$ gilt

$$F_{ij}(p) := g_\psi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \right) = \begin{cases} \frac{p_i p_j}{|p|^2} - \psi(|p|)^2 \frac{p_i p_j}{|p|^4} & i \neq j \\ \frac{p_i^2}{|p|^2} + \psi(|p|)^2 \left(\frac{1}{|p|^2} - \frac{(p_i)^2}{|p|^4} \right) & i = j \end{cases}.$$

Es lässt sich g_ψ genau dann glatt in 0 fortsetzen, wenn sich die Funktionen $F_{ij} : U_R \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ glatt in 0 fortgesetzt werden können. Wir entwickeln nun ψ^2 um 0 mithilfe des Satzes von Taylor und erhalten für $i \neq j$ und $n \geq 5$, dass $F_{ij}(p)$ gegeben ist durch

$$p_i p_j \left(\sum_{k=0, k\neq 2}^{n} (\psi^2)^{(k)}(0) \frac{|p|^{k-4}}{k!} + \left(\frac{(\psi^2)^{(2)}(0)}{2} - 1 \right) \frac{1}{|p|^2} + |p|^{n+1-4} h(|p|) \right),$$

wobei h eine glatte Funktion auf $[0, R)$ ist. Daraus folgt, dass F_{ij} genau dann glatt in 0 ist, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind (Übung*, die ersten drei Terme sind leicht, danach wird es etwas komplizierter):

- $(\psi^2)^{(0)}(0) = (\psi^2)^{(2k+1)}(0) = 0$, alle $k \in \mathbb{N}$,
- $(\psi^2)^{(2)}(0) = 2$.

(Denn: Die Funktion $p \mapsto p_i p_j |p|^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ungerade ist nicht glatt, da partielle Ableitungen genügend größer Ordnung in 0 divergieren. Die Funktion $p \mapsto p_i p_j |p|^n h(|p|)$ ist mindestens n-mal stetig diffbar und häufiger stetig diffbar als $p \mapsto p_i p_j |p|^k$ mit $k \leq n - 1$.)

Diese Eigenschaften sind äquivalent zu $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ und $\psi^{(2n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Ähnlich lässt sich der Fall $i = j$ behandeln. $\square$

Beispiel. Das n-dimensionale Modell mit undendlichem Radius und $\psi(r) = \sinh(r)$ heißt hyperbolischer Raum und wird mit $\mathbb{H}^n$ bezeichnet. (Man würde normalerweise den hyperbolischen Raum etwas anders einführen und dann beweisen, dass er eine Modellmannigfaltigkeit ist).

Auf Modellmannigfaltigkeiten (und allgemeiner auf Warpprodukten) kann man den geodätischen Abstand und das riemannsche Volumen recht einfach ausrechnen.

Proposition. *Seien (X, g_X) und (Y, g_Y) riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\psi : X \to (0, \infty)$ glatt. Ist Y m-dimensional, so erfüllt das riemannsche Volumen vom Warpprodukt $(M, g_X \oplus_\psi g_Y)$ die Gleichung*

$$\mathrm{vol}_{g_X \oplus_\psi g_Y} = (\psi^m \otimes 1) \cdot \mathrm{vol}_{g_X} \otimes \mathrm{vol}_{g_Y}.$$

Hier ist $(\psi^m \otimes 1) : X \times Y \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \psi^m(x)$ und $\mathrm{vol}_{g_X} \otimes \mathrm{vol}_{g_Y}$ das Produktmaß von vol_{g_X} und vol_{g_Y}.

Beweis. Die Formel lässt sich leicht über die Koordinatendarstellung nachrechnen (Übung). $\square$

Zeichnung

Proposition. *Ist (M, g) ein riemannsches Modell mit Skalierungsfunktion ψ, so gilt*

$$\rho(x, 0) = |x|$$

und

$$\mathrm{vol}_g(B_r^\rho(0)) = \omega_n \int_0^r \psi^{n-1}(r)\,\mathrm{d}r,$$

wobei ω_n das Volumen von $\mathbb{S}^{n-1}$ ist.

Beweis. Die Aussage über die Metrik lässt sich leicht nachrechnen (vgl. Situation im $\mathbb{R}^n$, Übung). Die Aussage über das Volumen folgt sofort aus der vorigen Proposition. $\square$

Bemerkung. Aus der vorigen Proposition und der Diskussion über die Vollständigkeit des metrischen Raumes (M, ρ_g) folgt, dass ein Modell genau dann vollständig ist, wenn es unendlichen Radius hat.

KAPITEL 2

Der Laplace-Beltrami-Operator

1. Der Laplace-Beltrami-Operator

In diesem Abschnitt führen wir das Hauptobjekt dieser Vorlesung, den Laplace-Beltrami Operator, ein. Zunächst benötigen wir noch den Begriff der Divergenz eines Vektorfeldes.

Theorem (Existenz und Eigenschaften der Divergenz)**.** *Es sei* (M, g) *eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Für jedes glatte Vektorfeld* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *existiert eine eindeutige Funktion* $\mathrm{div}X \in C^\infty(M)$*, sodass*

$$\int_M (\mathrm{div}X)\,\varphi\,\mathrm{dvol}_g = -\int_M \langle X, \nabla\varphi\rangle\,\mathrm{dvol}_g$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(M)$*.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt leicht (siehe auch unten).

Ende 12. Vorlesung

Wir zeigen nun zunächst, dass $\mathrm{div}X$ in jeder Karte existiert. Sei dazu (U, ψ) eine Karte mit lokalen Koordinatenfunktionen $x^i, i = 1, \ldots, n$, und sei $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_M \langle X, \nabla\varphi\rangle\,\mathrm{dvol}_g &= \int_U d\varphi(X)\,\mathrm{dvol}_g \\
&= \int_U X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\varphi\,\mathrm{dvol}_g \\
&= \int_{\psi(U)} X^i \circ \psi^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi\right) \circ \psi^{-1}\sqrt{\det g_{ij}\circ\psi^{-1}}d\lambda \\
&= \int_{\psi(U)} X^i \circ \psi^{-1}\partial_i(\varphi\circ\psi^{-1})\sqrt{\det g_{ij}\circ\psi^{-1}}d\lambda \\
\text{(Satz von Stokes)}\quad &= -\int_{\psi(U)} \partial_i\left(\sqrt{\det g_{ij}\circ\psi^{-1}}X^i\circ\psi^{-1}\right)\varphi\circ\psi^{-1}d\lambda \\
&= -\int_{\psi(U)} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det g_{ij}}X^i\right)\circ\psi^{-1}\varphi\circ\psi^{-1}d\lambda \\
&= -\int_M \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det g_{ij}}X^i\right)\varphi d\mathrm{vol}_g.
\end{aligned}$$

Das zeigt die Existenz von $\mathrm{div}X$ und

$$\mathrm{div}X = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det g_{ij}}X^i\right)$$

in der Karte (U,ψ).

Nun definieren wir $\mathrm{div}X$ auf ganz M mittels dieser Gleichung (für jeden Punkt $p \in M$ wählen wir eine Karte (U,ψ) mit $p \in U$ und definieren $\mathrm{div}X$ gemäß der Gleichung). Die schon gezeigte Eindeutigkeit liefert, dass dies Wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Karte abhängt. Die Identität

$$\int_M (\mathrm{div}X)\,\varphi\,\mathrm{dvol}_g = -\int_M \langle X, \nabla\varphi\rangle\,\mathrm{dvol}_g$$

folgt mittels einer Zerlegung $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n$, wobei φ_i glatte Funktionen sind, deren Träger im Definitionsgebiet einer Karte enthalten ist. □

Bemerkung.

- Ist X ein glattes Vektorfeld und sind (x^i) lokale Koordinaten, so folgt aus dem Beweis

$$\begin{aligned}\mathrm{div}X &= \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{\det g_{ij}}X^k\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k}X^k + X^k\frac{\partial}{\partial x^k}\log\sqrt{\det g_{ij}}.\end{aligned}$$

  Man kann div alternativ auch über diese Formel definieren, muss dann aber nachrechnen, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Karte ist.

- Die Formel

$$\int_M (\mathrm{div}X)\varphi\,\mathrm{dvol}_g = -\int_M \langle X, \nabla\,\varphi\rangle\,\mathrm{dvol}_g$$

  gilt auch dann noch, wenn X ein kompakt getragenes glattes Vektorfeld und φ eine beliebige glatte Funktion ist (Übung).

Definition (Laplace-Beltrami-Operator)**.** Sei (M,g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Operator

$$\Delta := \Delta_g := \mathrm{div}\circ\nabla : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

heißt *Laplace-Beltrami-Operator.*

In lokalen Koordinaten (x^i) ist er gegeben durch

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{\det g_{ij}}g^{kl}\frac{\partial}{\partial x^l}f\right).$$

Theorem (Greensche Formel)**.** *Es sei* (M, g) *eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Für* $f \in C^\infty(M)$ *und* $\varphi \in C_c^\infty(M)$ *gilt*

$$\int_M f(\Delta\varphi)\,\mathrm{dvol}_g = -\int_M \langle \nabla f, \nabla\varphi \rangle\,\mathrm{dvol}_g = \int_M (\Delta f)\varphi\,\mathrm{dvol}_g.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den Eigenschaften der Divergenz und der Beobachtung, dass $\nabla\varphi$ auch kompakten Träger hat. □

Bemerkung. Für die Gültigkeit der Greenschen Formel ist es wichtig, dass eine Funktion kompakten Träger hat. Sonst tauchen in der Formel noch Randterme auf, vgl. die Situation im $\mathbb{R}^n$.

Um interessante Beispiele zu erhalten, ist es manchmal notwendig, allgemeinere Maße als vol_g zu betrachten.

Definition (Gewichtete Mannigfaltigkeit)**.** Ein Tripel (M, g, μ) heißt *gewichtete Mannigfaltigkeit*, falls (M, g) eine riemannschen Mannigfaltigkeit und μ ein Borel-Maß auf M ist, für welches eine glatte Funktion $\Upsilon : M \to (0, \infty)$ existiert, sodass $\mathrm{d}\mu = \Upsilon\,\mathrm{dvol}_g$.

Ist (M, g, μ) eine gewichtete Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{d}\mu = \Upsilon\,\mathrm{dvol}_g$, so definiert man die *gewichtete Divergenz*

$$\mathrm{div}_\mu : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

durch

$$\mathrm{div}_\mu X = \frac{1}{\Upsilon}\mathrm{div}(\Upsilon X).$$

Analog definiert man $\Delta_\mu := \mathrm{div}_\mu \circ \nabla_g$, den *gewichteten Laplace Operator*. Ersetzt man überall vol_g durch μ, so gilt die Greensche Formel auch für Δ_μ. In lokalen Koordinaten (x^i) erhalten wir

$$\mathrm{div}_\mu X = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^i}(\rho X^i)$$

und

$$\Delta_\mu f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j} f\right),$$

wobei $\rho = \Upsilon\sqrt{\det(g_{ij})}$.

Am Ende dieses Abschnittes rechnen wir den Laplace-Beltrami Operator von Modellmannigfaltigkeiten aus. Es sei (M, g) eine Modellmannigfaltigkeit vom Radius $R > 0$ mit Skalierungsfunktion ψ. Um unnötige Notation zu vermeiden, identifizieren wir hier in diesem Beispiel $M \setminus \{0\}$ mit $M' := (0, \infty) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1}$. Es sei $f \in C^\infty(M')$. Für jedes $\rho > 0$ ist die Funktion $f(\rho, \cdot) : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto f(r, \theta)$ glatt und für jedes $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist die Funktion $f(\cdot, \theta) : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \rho \mapsto f(\rho, \theta)$ glatt. Mit $\frac{\partial}{\partial r}$ bezeichnen wir die gewöhnliche partielle Ableitung nach der ersten Komponente.

Proposition. *Es gilt*

$$\Delta f(\rho,\theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\rho,\theta) + \left(\frac{d\log\psi^{n-1}}{dr}(\rho)\right)\frac{\partial f}{\partial r}(\rho,\theta) + \frac{1}{\psi^2(\rho)}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}(f(\rho,\cdot))(\theta).$$

Beweis. Wir wählen die lokalen Koordinaten $r, \vartheta^1, \ldots, \vartheta^{n-1}$, wobei $r((\rho,\theta)) = \rho$ und $\vartheta^i((\rho,\theta)) = \tilde{\vartheta}^i(\theta)$, für lokale Koordinaten $\tilde{\vartheta}^1, \ldots, \tilde{\vartheta}^{n-1}$ von $\mathbb{S}^{n-1}$. In diesen Koordinaten ist die Matrix der Metrik g gegeben durch

$$(g_{ij}(\rho,\theta)) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \psi(\rho)^2(\gamma_{ij}(\theta)) & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

wobei $(\gamma_{ij}(\theta))$ die lokale Darstellung der Metrik von $\mathbb{S}^{n-1}$ ist. Deswegen gilt für die Inverse

$$(g^{ij}(\rho,\theta)) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \psi(\rho)^{-2}(\gamma^{ij}(\theta)) & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

und $\det(g_{ij}(\rho,\theta)) = \psi(\rho)^{2(n-1)}\det(\gamma_{ij}(\theta))$. Schreiben wir $\theta_0 := r$, so gilt (s.o.)

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\sum_{k,l=0}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta^k}\left(\sqrt{\det g_{ij}}\,g^{kl}\frac{\partial}{\partial\theta^l}f\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\det g_{ij}}\frac{\partial}{\partial r}f\right) \\ &\qquad + \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\sum_{k,l=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta^k}\left(\sqrt{\det g_{ij}}\,g^{kl}\frac{\partial}{\partial\theta^l}f\right). \end{aligned}$$

Hier haben wir $g^{01} = g^{10} = 0$ und $g^{11} = 1$ verwendet. Da ψ nur von ρ und γ_{ij} nur von θ abhängt, folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\det g_{ij}}\frac{\partial}{\partial r}f\right) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}f + \frac{1}{\psi^{n-1}}\frac{d}{dr}\psi^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}f \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}f + \frac{d}{dr}\log\psi^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}f \end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\sum_{k,l=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta^k}\left(\sqrt{\det g_{ij}}g^{kl}\frac{\partial}{\partial\theta^l}f\right) = \frac{\psi^{-2}}{\sqrt{\det\gamma_{ij}}}\sum_{k,l=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\theta^k}\left(\sqrt{\det\gamma_{ij}}\gamma^{kl}\frac{\partial}{\partial\theta^l}f\right)$$
$$= \frac{1}{\psi^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}f.$$

Das beendet den Beweis. □

Die Proposition zeigt, dass es besonders einfach ist Δf für Funktionen zu berechnen, die nicht von θ abhängen. Insbesondere erhalten wir in den oben diskutierten Beispielen $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ die folgenden (etwas verkürzten) Darstellungen:

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

$$\Delta_{\mathbb{S}^n} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1)\cot r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sin^2 r}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1)\coth r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sinh^2 r}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

Dies liefert außerdem eine Möglichkeit $\Delta_{\mathbb{S}^n}$ rekursiv zu berechnen.

2. Distributionen

Es ist das Ziel der Vorlesung Eigenschaften von Δ_μ und der davon induzierten Dynamik mithilfe der Geometrie von (M, g) zu untersuchen. Aus verschiedenen Gründen haben der Raum der glatten Funktionen und Δ_μ als Abbildung auf glatten Funktionen schlechte funktionalanalytische Eigenschaften. Deshalb erweitern wir Δ_μ zunächst auf Distributionen und schränken ihn später zu einem selbstadjungierten Operator auf L^2-Funktionen ein.

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Wir betrachten nun $C_c^\infty(M)$ als Raum von Testfunktionen, statten ihn mit einem entsprechenden Konvergenzbegriff aus und schreiben $\mathcal{D}(M)$ statt $C_c^\infty(M)$ um diese Konvergenz hervorzuheben. Für eine Karte (U, φ) mit lokalen Koordinaten (x^i) und einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} := \partial^\alpha(\psi\circ\varphi^{-1})\circ\varphi : U \to \mathbb{R}.$$

Dabei ist wie wie üblich $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha^1}\cdots\partial_n^{\alpha^n}$, falls $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$.

Definition (Konvergenz in $\mathcal{D}(M)$)**.** Eine Folge (ψ_n) in $\mathcal{D}(M)$ konvergiert gegen $\psi \in \mathcal{D}(M)$, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- Es existiert eine kompakte Menge $K \subseteq M$, sodass $\operatorname{supp} \psi_n \subseteq K$ für alle (großen) $n \in \mathbb{N}$,
- für alle Karten (U, φ) und alle Multiindizes α konvergiert die Folge $(\frac{\partial \psi_n}{\partial x^\alpha})$ gleichmäßig gegen $\frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}$.

In diesem Falle schreiben wir $\psi_n \overset{\mathcal{D}}{\to} \psi$.

Bemerkung.
- Es gibt eine Vektorraumtopologie, die den oben definierten Konvergenzbegriff auf auf $\mathcal{D}(M)$ induziert. Wenn M nicht kompakt ist, ist diese allerdings nicht metrisierbar. Betrachte zum Beispiel $M = \mathbb{R}$ und eine Folge von glatten Funktionen (ψ_n), mit $\psi_n = 1$ auf $[-n, n]$ und $\psi_n = 0$ auf $\mathbb{R} \setminus [-(n+1), n+1]$. Angenommen die Vektorraumtopologie von $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ wäre von einer Metrik d erzeugt. Da die Skalarenmultiplikation auf topologischen Vektorräumen stetig ist, existieren $c_n > 0$, sodass
$$c_n \psi_n \in B^d_{1/n}(0).$$
Demzufolge konvergiert die Folge $(c_n \psi_n)$ in $\mathcal{D}(M)$ gegen 0. Dies kann aber nicht sein, da die Träger der Funktionen in keiner festen kompakten Menge enthalten sind. Dies ist ein Widerspruch.
- Wenn wir von Stetigkeit von Abbildungen auf $\mathcal{D}(M)$ sprechen, meinen wir immer Folgenstetigkeit.

Ende 13. Vorlesung

Definition (Distribution)**.** Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *Distribution* ist eine stetige lineare Abbildung $u : \mathcal{D}(M) \to \mathbb{R}$. Die Gesamtheit aller Distributionen bezeichnen wir mit $\mathcal{D}'(M)$.

Erinnerung: Es sei (M, g, μ) eine gewichtete Mannigfaltigkeit. Die lokalen L^p-Räume sind definiert durch
$$L^p_{\text{loc}}(\mu) := \{f \in L^0(\mu) \mid f 1_K \in L^p(\mu) \text{ für alle kompakten } K \subseteq M\}.$$
Eine Folge (f_n) konvergiert in $L^p_{\text{loc}}(\mu)$ gegen $f \in L^p_{\text{loc}}(\mu)$, falls für jede kompakte Menge $K \subseteq M$ gilt
$$\|f_n 1_K - f 1_K\|_p \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Wir interpretieren nun die Lebesgue-Räume als Unterräume von $\mathcal{D}'(M)$. Sei dazu (M, g, μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu gegebenem $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ definieren wir die Distribution u_f durch

$$u_f : \mathcal{D}(M) \to \mathbb{R},\ \psi \mapsto \int_M f\psi \,\mathrm{d}\mu.$$

Das nächste Lemma zeigt, dass die zugehörige Abbildung

$$I_\mu : L^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \to \mathcal{D}'(M),\ f \mapsto u_f$$

injektiv ist.

Lemma. *Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Es gilt $f = 0$ genau dann, wenn $u_f = 0$.*

Beweis. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen $f \in L^1(\mu)$ (betrachte sonst $f\varphi$ mit $\varphi \in C_c^\infty(M)$). Wir zeigen, dass das durch

$$m_f(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$$

definierte signierte Borelmaß m_f verschwindet. Seien $K \subseteq M$ kompakt und $U_n \subseteq M$ offen und relativkompakt mit $K = \cap_n U_n$. Es existieren glatte Abschneidefunktionen φ_n mit $\varphi_n = 1$ auf K, $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq U_n$ und $0 \leq \varphi_n \leq 1$. Der Satz von Lebesgue und die Voraussetzung liefern

$$m_f(K) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_M f\varphi_n \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Da kompakte Mengen die Borel-σ-Algebra erzeugen, folgt die gewünschte Aussage $m_f = 0$. □

Als unmittelbate Folgerung halten wir für später fest:

Folgerung. *Es ist $\mathcal{D}(M)$ dicht in $L^2(\mu)$.*

Beweis. Das vorige Lemma zeigt $\mathcal{D}(M)^\perp = \{0\}$, sodass $L^2(\mu) = (\{0\}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{D}(M)}$. □

Distributionen, die durch Funktionen induziert werden, spielen eine besondere Rolle und bekommen daher einen eigenen Name.

Definition (Reguläre Distribution)**.** Es sei (M, g, μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(M)$ heißt *regulär*, falls es eine Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ gibt, mit $u = u_f$.

Bemerkung. (a) Da die betrachteten Maße alle glatte strikt positive Dichten bezüglich vol_g haben, ist die Regularität einer Distribution unabhängig vom Maß μ. Es gilt also $I_\mu(L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)) = I_{\mu'}(L^1_{\mathrm{loc}}(\mu'))$. Die konkrete Abbildung I_μ hängt allerdings schon von Maß ab. Gilt $\mu = \Upsilon \mathrm{vol}_g$ und $\mu' = \Upsilon' \mathrm{vol}_g$, so erhalten wir

$$I_\mu(f) = I_{\mu'}((\Upsilon')^{-1}\Upsilon f)$$

für alle

$$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu) = L^1_{\mathrm{loc}}(\mu') = L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{vol}_g).$$

Im Folgenden wählen wir stets ein festes Referenzmaß und betrachten $L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ als Teilraum von $\mathcal{D}'(M)$. Wir missbrauchen die Notation und schreiben nur f für die Distribution $u_f = I_\mu(f)$.

(b) Nicht jede Distribution ist regulär. Die Funktionsauswertung in einem Punkt $x \in M$, welche durch $\delta_x : \mathcal{D}(M) \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$ definiert ist, ist nicht regulär (Übung). Sie heißt δ-Distribution (im Punkt x).

Ist u eine Distribution, so schreiben wir (u, ψ) für ihren Wert an der Stelle ψ. Wir statten $\mathcal{D}'(M)$ mit der schwach-*-Topologie, d.h. der von den Umgebungen

$$V_{\psi,\varepsilon}(u) := \{v \in \mathcal{D}'(M) \mid |(u - v, \psi)| < \varepsilon\}$$

erzeugten Topologie, aus. Bezüglich dieser Topologie konvergiert eine Folge von Distributionen (u_n) genau dann gegen $u \in \mathcal{D}'(M)$, falls für alle $\psi \in \mathcal{D}(M)$ gilt $(u_n, \psi) \to (u, \psi)$.

Für eine offene Teilmenge $O \subseteq M$ fassen wir in natürlicher Weise (durch fortsetzen durch 0) die Testfunktionen $\mathcal{D}(O)$ als Teilraum von $\mathcal{D}(M)$ auf.

Definition (Träger einer Distribution)**.** Es sei $u \in \mathcal{D}'(M)$ und O die größte offene Teilmenge von M, sodass $(u, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(O)$. Die Menge $\operatorname{supp} u := M \setminus O$ heißt *Träger* von u.

Bemerkung. Es ist noch zu zeigen, dass der Träger wohldefiniert ist (Übung).

Für spätere Anwendungen benötigen wir noch den Begriff des Trägers einer Funktion $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Da f nur fast-überall gegeben ist, kann dieser nicht als Abschluss von $\{x \in M \mid f(x) > 0\}$ definiert werden. Stattdessen fassen wir f mithilfe der Einbettung I_μ als Distributionen auf, und definieren $\operatorname{supp} f := \operatorname{supp} I_\mu(f)$ als Träger der zugehörigen Distribution. Dieser ist ebenfalls unabhängig vom Maß μ. Es lässt sich leicht nachrechnen (Übung), dass $\operatorname{supp} f$ die Menge aller $x \in M$ ist, für die für jede offene Umgebung U von x gilt

$$\mu(U \cap \{x \in M \mid f(x) > 0\}) > 0.$$

Im Falle von $f \in C(M)$ ist $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in M \mid f(x) > 0\}}$ (Übung).

Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Aus dem Satz von Lebesgue und den Definitionen der Topologien ergibt sich leicht, dass die folgenden Einbettungen stetig sind:

$$\mathcal{D}(M) \hookrightarrow L^p(\mu) \hookrightarrow L^p_{\mathrm{loc}}(\mu) \hookrightarrow L^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \hookrightarrow \mathcal{D}'(M).$$

Wir haben die Topologie auf $\mathcal{D}(M)$ so gewählt, dass der (gewichtete) Laplace-Operator (und überhaupt alle anderen genügend guten Differentialoperatoren) stetig sind. Wir definieren

$$\Delta_\mu : \mathcal{D}'(M) \to \mathcal{D}'(M),\ \psi \mapsto \langle \Delta_\mu u, \psi\rangle := \langle u, \Delta_\mu \psi\rangle.$$

Aufgrund der Greenschen Formel ist dies eine Erweiterung von Δ_μ, von $C^\infty(M)$ auf $\mathcal{D}'(M)$ (Übung).

Es ist auch möglich distributionelle Versionen der partiellen Ableitungen (und allgemeineren Vektorfeldern) einzuführen. Da diese auf $\mathcal{D}(M)$ nicht symmetrisch bezüglich der Paarung $(\cdot,\cdot)$ sind, muss die Definition entsprechend angepasst werden. Für eine Karte (U, φ) mit die zugehörigen Koordinatenfunktionen (x^i) definieren wir

$$D_i : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(U),\ D_i\psi := \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^i}(\rho\,\psi),$$

wobei $\rho = \Upsilon\sqrt{\det(g_{ij})}$. Ähnlich wie beim Beweis der Existenz der Divergenz rechnet man leicht nach, dass für $\psi, \eta \in \mathcal{D}(U)$ gilt

$$\int_U \frac{\partial}{\partial x^i}\psi\eta \,\mathrm{d}\mu = -\int_U \psi D_i \eta \,\mathrm{d}\mu.$$

Wir definieren nun

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : \mathcal{D}'(U) \to \mathcal{D}'(U),\ \psi \mapsto (\frac{\partial}{\partial x^i}u, \psi) := -(u, D_i\psi).$$

Wegen der oben nachgerechneten partiellen Integrationsregel ist $\frac{\partial}{\partial x^i}$ auf $\mathcal{D}'(M)$ eine Fortsetzung von $\frac{\partial}{\partial x^i}$ auf $\mathcal{D}(M)$ (und sogar von $\frac{\partial}{\partial x^i}$ auf $C^\infty(U)$). Da alle Vektorfelder lokal als Linearkombination der $\frac{\partial}{\partial x^i}$ dargestellt werden können, liefert dies auch lokale distributionelle Versionen beliebiger Vektorfelder.

Ende 14. Vorlesung

Analog zum skalaren Fall können auch vektorwertige Distributionen eingeführt werden. Wir geben hier nur eine kleine Skizze. Der Raum der Testfunktionen ist in diesem Fall der Raum der glatten Vektorfelder mit kompaktem Träger. Ihn bezeichnen wir mit $\vec{\mathcal{D}}(M)$. Die Konvergenz in $\vec{\mathcal{D}}(M)$ definiert wir ähnlich wie die Konvergenz in $\mathcal{D}(M)$. Wir sagen eine Folge von Vektorfeldern (ω_n) in $\vec{\mathcal{D}}(M)$ konvergiert gegen $\omega \in \vec{\mathcal{D}}(M)$, falls:

- Es gibt eine kompkate Menge $K \subseteq M$ mit $\operatorname{supp} \omega_n \subseteq K$, $n \in \mathbb{N}$.
- Für jede Karte (U, φ) mit lokalen Koordinaten $x^i, i = 1, \dots, n$ und für alle $i = 1, \dots, n$, $k \in \mathbb{N}$ und Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^k$ gilt

$$\frac{\partial^\alpha \omega_n(x^i)}{\partial x^\alpha} \to \frac{\partial^\alpha \omega(x^i)}{\partial x^\alpha}$$

  gleichmäßig auf U, für $n \to \infty$.

In diesem Fall schreiben wir $\omega_n \overset{\vec{\mathcal{D}}}{\to} \omega$. Den stetigen Dualraum zu $\vec{\mathcal{D}}(M)$ bezeichnen wir mit $\vec{\mathcal{D}}'(M)$, seine Elemente heißen Vektorwertige Distributionen. Wie im skalaren Fall statten wir ihn mit der schwach-*-Topologie aus.

Ein Vektorfeld $X : M \to TM$ heißt messbar, falls für jede Karte (U, φ) mit lokalen Koordinaten (x^i) die Abbildungen $X(x^i) : U \to \mathbb{R}$ Borel-messbar sind. Sind X, Y messbare Vektorfelder, so ist die Abbildung

$$M \to \mathbb{R},\ p \mapsto g(p)(X_p, Y_p)$$

Borel-messbar (Übung). Mit $\vec{L}^0(\mu)$ bezeichnen wir den Quotienten des Raumes aller messbaren Vektorfelder bezüglich der Äquivalenzrelation

$$X \sim Y :\Longleftrightarrow |X - Y| = 0\ \mu\text{-fast sicher.}$$

Die zugehörigen Vektorwertigen L^p-Räume sind gegeben durch

$$\vec{L}^p(\mu) := \{X \in \vec{L}^0(\mu) \mid |X| \in L^p(\mu)\}$$

und

$$\vec{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mu) := \{X \in \vec{L}^0(\mu) \mid |X| \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mu)\}.$$

Ausgestattet mit der Norm

$$\|\cdot\|_p : \vec{L}^p(\mu) \to [0,\infty),\ X \mapsto \|X\|_p := \||X|\|_p$$

ist $\vec{L}^p(\mu)$ ein Banachraum (Übung). Wir sagen $X_n \to X$ in $\vec{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mu)$, falls $|X_n - X| \to 0$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Zu gegebenem $X \in \vec{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ definieren wir die Distribution

$$U_X : \vec{\mathcal{D}}(M) \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \int_M \langle X, \omega\rangle \,\mathrm{d}\mu$$

und identifizieren X mit U_X. Ähnlich wie oben erhalten wir die Injektivität und die Stetigkeit der Einbettungen

$$\vec{\mathcal{D}}(M) \hookrightarrow \vec{L}^p(\mu) \hookrightarrow \vec{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mu) \hookrightarrow \vec{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mu) \hookrightarrow \vec{\mathcal{D}}'(M).$$

Die Operatoren

$$\nabla : \mathcal{D}(M) \to \vec{\mathcal{D}}(M) \text{ und } \mathrm{div}_\mu : \vec{\mathcal{D}}(M) \to \mathcal{D}(M)$$

sind stetig. Wir definieren ihre distributionellen Varianten durch

$$\nabla : \mathcal{D}'(M) \to \vec{\mathcal{D}}'(M),\ \omega \mapsto (\nabla_g u, \omega) := -(u, \mathrm{div}_\mu \omega)$$

und

$$\mathrm{div}_\mu : \vec{\mathcal{D}}'(M) \to \mathcal{D}'(M),\ \psi \mapsto (\mathrm{div}_\mu U, \psi) := -(U, \nabla\psi).$$

Auch diese Operatoren sind stetige Fortsetzungen der entsprechenden Operatoren auf den Testfunktionen und die Gleichung $\Delta_\mu = \mathrm{div}_\mu \circ \nabla$ wird auf $\mathcal{D}'(M)$ fortgesetzt (Übung).

3. Sobolev-Räume erster Ordnung

Wir lernen nun einige wichtige Funktionenräume und ihre Grundlegenden Eigenschaften kennen. Dies dient als technische Grundlage für die weiteren Betrachtungen.

Definition (Sobolev-Räume erster Ordnung)**.** Der Funktionenraum

$$W^1(M,\mu) := \{f \in L^2(\mu) \mid \nabla f \in \vec{L}^2(\mu)\}$$

heißt *Sobolev-Raum erster Ordnung*. Er ist ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|_{W^1}^2 := \int_M |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}\mu + \int_M f^2 \, \mathrm{d}\mu.$$

Den Abschluss von $C_c^\infty(M)$ in $W^1(M,\mu)$ bezeichnen wir mit $W_0^1(M,\mu)$. Der *lokale Sobolev-Raum erster Ordnung* ist gegeben durch

$$W^1_{\mathrm{loc}}(M,\mu) := \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu) \mid \nabla f \in L^2_{\mathrm{loc}}(M,\mu)\}.$$

Proposition (Vollständigkeit W^1)**.** *Es sei (M,g,μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Sobolev-Raum $(W^1(M,\mu), \|\cdot\|_{W^1})$ ist vollständig.*

Beweis. Es sei (f_n) eine Cauchyfolge in $W^1(M,\mu)$. Da $L^2(\mu)$ und $\vec{L}^2(\mu)$ vollständig sind, existieren $f \in L^2(\mu)$ und $X \in \vec{L}^2(\mu)$ mit $f_n \to f$ in $L^2(\mu)$ und $\nabla f_n \to X$ in $\vec{L}^2(\mu)$. Für eine Testvektorfeld $\omega \in \vec{\mathcal{D}}(M)$ gilt

$$(\nabla f, \omega) = -\lim_{n\to\infty} (f_n, \mathrm{div}_\mu \omega) = \lim_{n\to\infty} (\nabla f_n, \omega) = (X, \omega).$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir $X = \nabla f$ und damit die Vollständigkeit von $W^1(M,\mu)$. $\square$

Bemerkung.

- Vollkommen analog kann man Sobolev-Räume auch bezüglich anderer L^p-Räume einführen. In diesem Fall schreibt man $W^{1,p}(M,\mu)$, und mit obiger Notation gilt
$$W^{1,2}(M,\mu) = W^1(M,\mu).$$
Für unsere Zwecke genügen die L^2-Versionen.
- Auf Mannigfaltigkeiten ist es nicht so leicht global Sobolev-Räume höherer Ordnung einzuführen. Wir werden dies allerdings unten für offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ tun.

Für später benötigen wir folgende Charakterisierung des lokalen Sobolev-Raumes.

Lemma. *Es sei (M,g,μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ sind äquivalent:*

(i) $f \in W^1_{\mathrm{loc}}(M,\mu)$.

(ii) *Für alle Karten (U,φ) mit lokalen Koordinaten (x^i) gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f \in L^2_{\mathrm{loc}}(U,\mu).$$

In diesem Fall ist ∇f in lokalen Koordinaten (x^i) gegeben durch

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Beweis. Übung. □

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, so schreiben wir $W^1_{\mathrm{e}}(\Omega)$ (bzw. $W^1_{0,\mathrm{e}}(\Omega)$ und $W^1_{\mathrm{loc,\,e}}(\Omega)$) für die Sobolevräume bezüglich des Lebesguemaßes. Die folgende Proposition zeigt, dass sich lokal Sobolevräume auf Mannigfaltigkeit nicht von Sobolevräumen im euklidischen unterscheiden.

Proposition. *Es sei (U,φ) eine Karte und U sei relativkompakt. Dann ist*

$$W^1(U,\mu) \to W^1_{\mathrm{e}}(\varphi(U)), \quad f \mapsto f \circ \varphi^{-1}$$

ein linearer Homöomorphismus.

Beweis. Wir setzen $V := \varphi(U)$ und $\bar f = f \circ \varphi^{-1}$. Weil die Dichte von $\mu \circ \varphi^{-1}$ bezüglich λ auf relativkompakten Mengen nach oben und unten beschränkt ist, erhalten wir $f_n \to f$ in $L^2(U,\mu)$ genau dann, wenn $\bar f_n \to \bar f$ in $L^2(V)$. Deswegen ist die Abbildung $f \mapsto \bar f$ ein topologischer Isomorphismus der L^2-Räume.

Man rechnet leicht nach, dass die distributionellen partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial x^i}$ auf $\mathcal{D}'(U)$ und die distributionellen partiellen Ableitungen ∂_i auf $\mathcal{D}'(V)$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f = (\partial_i \bar f) \circ \varphi$$

erfüllen. Achtung: Hier wird f als Distribution $I_\mu(f)$ und $\bar f$ als Distribution $I_\lambda(\bar f)$ aufgefasst.

Ende 15. Vorlesung

Da U relativ kompakten ist, gibt es eine Konstante $C > 0$, mit

$$C^{-1} \sum_i (\xi^i)^2 \le g^{ij}(p)\xi^i\xi^j \le C \sum_i (\xi^i)^2$$

für alle $(\xi^1,\dots,\xi^n) \in \mathbb{R}^n$ und $p \in U$. Wegen des vorigen Lemmas folgt außerdem, dass für $f \in W^1(U,\mu)$ gilt

$$|\nabla f|^2 = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} = g^{ij} (\partial_i \bar f \partial_j \bar f) \circ \varphi.$$

Zusammen erhalten wir

$$C^{-1}|\nabla_{\mathrm{e}}\bar{f}|^2 \circ \varphi \leq |\nabla f|^2 \leq C|\nabla_{\mathrm{e}}\bar{f}|^2 \circ \varphi,$$

wobei ∇_{e} der euklidische Gradient ist. Da die Abbildung $f \mapsto \bar{f}$ ein topologischer Isomorphismus der L^2-Räume ist, folgt die gewünschte Aussage. □

Lemma (Produktregel). *Es sei (M, g, μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $u \in W^1_{\mathrm{loc}}(M, \mu)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ gilt*

$$\nabla(\varphi \cdot u) = \varphi \nabla u + u \nabla \varphi.$$

Beweis. Übung. □

In der folgenden Proposition bezeichnen wir mit $W^1_c(M, \mu)$ die Elemente aus $W^1(M, \mu)$ mit kompaktem Träger.

Proposition. *Es sei (M, g, μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gilt $W^1_c(M, \mu) \subseteq W^1_0(M, \mu)$.*

Beweis. Zunächst zeigen wir die Aussage für Funktionen, deren Träger in einer Karte enthalten ist. Sei dazu $f \in W^1_c(M, \mu)$ und eine Karte (U, φ) mit $\operatorname{supp} f \subseteq U$ gegeben. Seien weiterhin (x^i) die zugehörigen lokalen Koordinaten. Wir definieren $V := \varphi(U)$ und die Koordinatendarstellung $\bar{f} := f \circ \varphi^{-1} : V \to \mathbb{R}$.

Es sei $\eta : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ ein Mollifier, d.h. eine glatte Abbildung mit $\operatorname{supp} \eta \subseteq B_1(0)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, \mathrm{d}x = 1.$$

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$\eta_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to [0, \infty),\ \eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \eta(\varepsilon^{-1} x)$$

und

$$\bar{f}_\varepsilon := \bar{f} * \eta_\varepsilon,$$

wobei $\bar{f}$ durch 0 auf $\mathbb{R}^n \setminus V$ fortgesetzt wurde. Die Funktionenfolge (f_ε) hat die folgenden Eigenschaften (Übung!):

- $\operatorname{supp} \bar{f}_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon(\operatorname{supp} \bar{f}) \subseteq V$ für kleine ε.
- $\bar{f}_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $\varepsilon > 0$.
- $\bar{f}_\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0+}{\longrightarrow} \bar{f}$ in $L^2(\mathbb{R}^n, \lambda)$.
- $\partial_i \bar{f}_\varepsilon \overset{\varepsilon \to 0+}{\longrightarrow} \partial_i \bar{f}$ in $L^2(\mathbb{R}^n, \lambda)$.

Diese Aussagen implizieren $\bar{f}_\varepsilon \in C_c^\infty(V)$ für kleine ε und die Konvergenz $\bar{f}_\varepsilon \to \bar{f}$ in $W^1_{\mathrm{e}}(V)$. Wir definieren $f_\varepsilon := \bar{f}_\varepsilon \circ \varphi$. Da für kleine ε der Träger von f_ε kompakt und in U enthalten ist, können wir f_ε durch 0 außerhalb von U glatt auf ganz M fortsetzen und es gilt $f_\varepsilon \in C_c^\infty(M)$. Aufgrund des Isomorphismus von $W^1_{\mathrm{e}}(V)$ und $W^1(U,\mu)$ folgt $f_\varepsilon \to f$ in $W^1(U,\mu)$.

Es sei nun $f \in W^1_c(M,\mu)$ beliebig. Wir wählen endlich viele Karten (U_i, φ_i), welche den Träger von f überdecken. Ferner wählen wir endlich viele Funktionen $\psi_i \in C_c^\infty(M)$, mit

- $\operatorname{supp} \psi_i \subseteq U_i$,
- $0 \leq \psi_i \leq 1$,
- $\sum_{i=1}^n \psi_i = 1$ auf $\operatorname{supp} f$,

und definieren $f_i := \psi_i f$. Aufgrund der Produktregel gilt

$$\nabla(f_i) = \psi_i \nabla f + f \nabla \psi_i,$$

und deshalb $f_i \in W^1(M,\mu)$. Da $f = \sum_i f_i$ und jedes f_i im Definitionsbereich einer Karte getragen ist, folgt die Aussage aus dem bereits Bewiesenen. $\square$

Proposition (Kettenregel)**.** *Es sei (M,g,μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit und $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt, mit*

$$C(0) = 0 \text{ und } C' \in C_b(\mathbb{R}).$$

(a) Für $f \in W^1_0(M,\mu)$ gilt $C \circ f \in W^1_0(M,\mu)$ und $\nabla(C \circ f) = (C' \circ f)\nabla f$.

(b) Für $f \in W^1_{\mathrm{loc}}(M,\mu)$ gilt $C \circ f \in W^1_{\mathrm{loc}}(M,\mu)$ und $\nabla(C \circ f) = (C' \circ f)\nabla f$.

Beweis. (a): Sei zunächst $f \in W^1_0(M,\mu)$. Wir wählen eine Folge (f_n) in $C_c^\infty(M)$, welche in $W^1(M,\mu)$ gegen f konvergiert. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $f_n \to f$ μ-fast sicher. Nach der üblichen Kettenregel gilt

$$\nabla(C \circ f_n) = (C' \circ f_n)\nabla f_n.$$

Da C eine Lipschitz-Funktion ist, konvergiert $C \circ f_n$ in $L^2(\mu)$ gegen $C \circ f$. Ferner folgt nach dem Satz über dominierte Konvergenz

$$(C' \circ f_n)\nabla f_n \to (C' \circ f)\nabla f \text{ in } \vec{L}^2(\mu).$$

Die Stetigkeit von ∇_g auf $\mathcal{D}'(M)$ und die Stetigkeit der Einbettungen $L^2(\mu) \hookrightarrow \mathcal{D}'(M)$ und $\vec{L}^2(\mu) \hookrightarrow \vec{\mathcal{D}}'(M)$ liefern

$$\nabla(C \circ f) = \lim_{n\to\infty} \nabla(C \circ f_n) = \lim_{n\to\infty} (C' \circ f_n)\nabla f_n = (C' \circ f)\nabla f,$$

wobei die Konvergenz im Sinne von $\vec{\mathcal{D}}'(M)$ erfolgt. Daraus folgt der Satz für Funktionen in $W^1_0(M,\mu)$.

(b): Sei nun $f \in W^1(M,\mu)$ beliebig. Sei $U \subseteq M$ relativ kompakt und offen und sei $\psi \in C_c^\infty(M)$ mit $\psi = 1$ auf U. Wegen der Produktregel und der vorherigen Proposition gilt $\psi f \in W_c^1(M,\mu) \subseteq W_0^1(M,\mu)$. Aus dem bisher Gezeigten folgt

$$\nabla(C \circ (\psi f)) = (C' \circ (\psi f))\nabla(\psi f).$$

Wegen $\psi = 1$ auf U, folgt die gewünschte Aussage auf U. Da U beliebig war, beendet dies den Beweis. $\square$

4. Einschub - Selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum

In diesem Abschnitt erinnern wir kurz an wichtige Eigenschaften selbstadjungierter Operatoren im Hilbertraum.

Es sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $A : D(A) \to H$ ein dicht definierter Operator. Es heißt A *nichtnegativ*, falls $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in D(A)$. Es heißt A *symmetrisch*, falls $\langle Ax, y\rangle = \langle Ax, y\rangle$ für alle $x, y \in D(A)$. Der Definitionsbereich des *adjungierten Operators* $A^* : D(A^*) \to H$ ist definiert als

$$D(A^*) := \{x \in H \mid \text{ex. } y \in H \text{ mit } \langle y, z\rangle = \langle x, Az\rangle \text{ für alle } z \in D(A)\}$$

und A^* wirkt auf ihm durch $A^*x := y$. Weiterhin heißt A *selbstadjungiert*, falls $A = A^*$. Symmetrische Operatoren erfüllen $D(A) \subseteq D(A^*)$. Deshalb ist ein dicht definierter Operator A genau dann selbstadjungiert, wenn er symmetrisch ist und $D(A^*) \subseteq D(A)$ gilt.

Ende 16. Vorlesung

Die *Resolventenmenge* eines dicht definierten abgeschlossenen Operators A ist definiert durch

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \text{ ist invertierbar und } (A-\lambda)^{-1} \text{ ist stetig}\}.$$

Aufgrund des Satzes vom abgeschlossenen Graphen gilt

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \text{ ist invertierbar}\}.$$

Das *Spektrum von A* ist die Menge $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Es heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwert von A*, falls es ein $f \neq 0$ gibt mit $Af = \lambda f$. In diesem Fall ist $A - \lambda$ nicht injektiv und es heißt f *Eigenvektor* zum Eigenwert λ. Eigenwerte gehören also stets zum Spektrum, es kann aber noch aus weiteren Elementen bestehen.

Lemma. *Es sei A ein dicht definiert und symmetrisch. Für $z \in \mathbb{C}$ und $f \in D(A)$ gilt*

$$\|(A - z)f\| \geq |\operatorname{Im} z|\|f\|.$$

Beweis. Einfache Rechnung. $\square$

Lemma. *Es sei A selbstadjungiert. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $z \in \rho(A)$.

(ii) Es gibt ein $c > 0$, sodass für alle $f \in D(A)$ gilt

$$\|(A - z)f\| \geq c\|f\|.$$

Insbesondere gilt $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Beweis. Fast wie für beschränkte Operatoren, siehe [**3**]. Das Insbesondere folgt nun mit dem vorigem Lemma. □

Das vorige Lemma zeigt, dass das Spektrum eines selbstadjungierten Operators fast aus Eigenwerten bestehet. Ist A selbstadjungiert, so gilt $\lambda \in \sigma(A)$ genau damm, wenn es eine Folge (f_n) in $D(A)$ gibt, mit $(A - \lambda)f_n \to 0, n \to \infty$, und $\|f_n\| = 1$.

Mir dieser Charakterisierung des Spektrums lässt sich das folgende Lemma leicht nachrechnen (Übung).

Lemma (Spektraler Abbildungssatz)**.** *Es sei A selbstadjungiert und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$ ist $(A-\alpha)^m(A-\beta)^{-n}$ beschränkt und selbstadjungiert und es gilt*

$$\sigma((A - \alpha)^m(A - \beta)^{-n}) = \left\{ \frac{(\lambda - \alpha)^m}{(\lambda - \beta)^n} \,\middle|\, \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

Lemma (Fundamentallemma Funktionalkalkül)**.** *Es sei A selbstadjungiert und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$ gilt*

$$\|(A - \alpha)^m(A - \beta)^{-n}\| = \sup \left\{ \frac{|\lambda - \alpha|^m}{|\lambda - \beta|^n} \,\middle|\, \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

Insbesondere

$$\|(A - \alpha)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(\alpha, \sigma(A))}.$$

Beweis. Da $(A - \alpha)^m(A - \beta)^{-n}$ selbstadjungiert ist, gilt

$$\|(A - \alpha)^m(A - \beta)^{-n}\| = \sup\{|\mu| \mid \mu \in \sigma((A - \alpha)^m(A - \beta)^{-n})\}$$

Für die Gleichung verwendeten wir [**6**, Satz VI.1.6 und Satz VI.1.7]. Damit folgt die Aussage aus dem Spektralen Abbildungssatz. □

Bemerkung. Die beiden Lemmas gelten auch für Linearkombinationen der entsprechenden Operatoren. Das lässt sich auch so verstehen:

Diskutieren.

Ist A selbstadjungiert, so schreiben wir

$$\lambda_{\min}(A) := \inf \sigma(A)$$

für das Infimum des Spektrums. Da $\sigma(A)$ abgeschlossen ist (das folgt leicht aus der obigen Charakterisierung des Spektrum), erhalten wir $\lambda_{\min}(A) \in \sigma(A)$. Es gilt folgende Charakterisierung der unteren Schranke des Spektrums.

Theorem (Rayleigh-Ritz-Prinzip)**.** *Es sei A selbstadjungiert. Dann gilt*

$$\lambda_{\min}(A) = \inf_{f \in D(A) \setminus \{0\}} \frac{\langle Af, f\rangle}{\|f\|^2}.$$

Beweis. Sei

$$R = \inf_{f \in D(A) \setminus \{0\}} \frac{\langle Af, f\rangle}{\|f\|^2}.$$

$R \leq \lambda_{\min}(A)$: Für $\lambda < R$ gibt es ein $c > 0$ mit

$$(\lambda + c)\|f\|^2 \leq \langle Af, f\rangle$$

für alle $f \in D(A)$. Es folgt

$$c\|f\|^2 \leq \langle (A - \lambda)f, f\rangle \leq \|(A - \lambda)f\|\|f\|$$

für alle $f \in D(A)$. Dies zeigt $\lambda \in \rho(A)$ und damit $R \leq \lambda_{\min}$.

$\lambda_{\min}(A) \leq R$: Ohne Einschränkung nehmen wir $\lambda_{\min}(A) = 0$ an. Für $\varepsilon > 0$ und $f \in D(A)$ gilt wegen des vorherigen Lemmas

$$\varepsilon^2\|f\|^2 \leq \|(A + \varepsilon)f\|^2 = \|Af\|^2 + 2\varepsilon\langle Af, f\rangle + \varepsilon^2\|f\|^2.$$

Es folgt

$$\frac{-\|Af\|^2}{2\varepsilon} \leq \langle Af, f\rangle.$$

Damit folgt die gewünschte Aussage für $\varepsilon \to \infty$. $\square$

5. Selbstadjungierte Realisierungen des Laplace-Operators und assoziierte Objekte

In diesem Abschnitt kommen wir nun (endlich) zu selbstadjungierten Realisierungen des Laplace-Operators. Deren Eigenschaften sind von Relevanz in Physik und Stochastik.

Sei (M, g, μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Mit

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}_\mu : C_c^\infty(M) \to L^2(\mu),\ \mathcal{L}f = -\Delta_\mu f$$

bezeichnen wir die Einschränkung von $-\Delta_\mu$ auf $D(\mathcal{L}) = C_c^\infty(M)$. Nach den Greenschen Formeln ist $\mathcal{L}$ ein symmetrischer Operator auf $L^2(\mu)$.

Lemma (Adjungierter von $\mathcal{L}$)**.** *Es gilt*

$$D(\mathcal{L}^*) = \{f \in L^2(\mu) \mid \Delta_\mu f \in L^2(\mu)\}$$

und

$$\mathcal{L}^* f = -\Delta_\mu f.$$

Beweis. Der Definitionsbereich von $\mathcal{L}^*$ erfüllt nach Definition

$$D(\mathcal{L}^*) = \{f \in L^2(\mu) \mid D(\mathcal{L}) \to \mathbb{R},\, \psi \to \langle f, \mathcal{L}\psi\rangle_2 \text{ stetig bez. } \|\cdot\|_2\}.$$

Sei $f \in L^2(\mu)$ mit $\Delta_\mu f \in L^2(\mu)$ gegeben. Nach Definition des distributionellen Laplace-Operators gilt für $\psi \in D(\mathcal{L}) = C_c^\infty(M)$

$$\langle f, \mathcal{L}\psi\rangle_2 = -\langle f, \Delta_\mu \psi\rangle_2 = -\langle \Delta_\mu f, \psi\rangle_2.$$

Somit ist die Abbildung $D(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}$, $\psi \mapsto \langle f, \mathcal{L}\psi\rangle_2$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_2$ und $f \in D(\mathcal{L}^*)$.

Sei nun $f \in D(\mathcal{L}^*)$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert ein $g \in L^2(\mu)$, sodass

$$-\langle f, \Delta_\mu \psi\rangle_2 = \langle f, \mathcal{L}\psi\rangle_2 = \langle g, \psi\rangle_2 \text{ für alle } \psi \in D(\mathcal{L}) = C_c^\infty(M).$$

Nach der Definition des distributionellen Laplace-Operators bedeutet dies aber $-\Delta_\mu f = g$. Weiterhin folgt die Gleichung $\mathcal{L}^* f = -\Delta_\mu f$ aus dieser Darstellung. $\square$

Ende 17. Vorlesung

Es wird sich als nützlich heraustellen zunächst die Resolvente des gewünschten Operators einzuführen. Dazu gehen wir wiefolgt vor. Für $\alpha \geq 0$ definieren wir die Skalarprodukte

$$\mathcal{E}_\alpha : W_0^1(M,\mu) \times W_0^1(M,\mu) \to \mathbb{R}$$

durch

$$\mathcal{E}_\alpha(f,g) := \int_M \langle \nabla f, \nabla g\rangle \,\mathrm{d}\mu + \alpha \int_M fg \,\mathrm{d}\mu.$$

Wir setzen $\mathcal{E} := \mathcal{E}_0$. Falls $\alpha > 0$ ist der Raum $(W_0^1(M,\mu), \mathcal{E}_\alpha)$ nach der Definition von $W_0^1(M,\mu)$ ein Hilbertraum. Jedes $f \in L^2(\mu)$ induziert ein stetiges Funktional l_f auf diesem Hilbertraum durch

$$l_f : W_0^1(M,\mu) \to \mathbb{R},\, g \mapsto \langle g, f\rangle_2.$$

Mit $G_\alpha f$ bezeichnen wir das eindeutige Element in $W_0^1(M,\mu)$, welches

$$\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f, g) = l_f(g) = \langle f, g\rangle_2$$

für alle $g \in W_0^1(M,\mu)$ erfüllt. Es existiert nach dem Rieszschen Darstellungssatz.

Theorem (Eigenschaften der Resolvente)**.** *Für $\alpha > 0$ ist die Abbildung $G_\alpha : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator mit $\|\alpha G_\alpha\| \leq 1$. Weiterhin gilt:*

(a) $G_\alpha - G_\beta = (\beta - \alpha) G_\beta G_\alpha$, $\alpha, \beta > 0$. *('Resolventengleichung')*

(b) $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha G_\alpha f = f$, $f \in L^2(\mu)$. *('Starke Stetigkeit')*

(c) $\operatorname{Bild} G_\alpha \subseteq D(\mathcal{L}^*) \cap W_0^1(M,\mu)$ *und* $(\mathcal{L}^* + \alpha) G_\alpha f = f$, $\alpha > 0$, $f \in L^2(\mu)$.

Bevor wir das Theorem beweisen benötigen wir noch ein Lemma, welches auch später nützlich ist. Ab jetzt schreiben wir $\mathcal{E}_\alpha(f) := \mathcal{E}_\alpha(f,f)$, $f \in W_0^1(M,\mu)$.

Lemma. *Für* $\alpha > 0$ *und* $f \in W_0^1(M,\mu)$ *gilt* $\|\alpha G_\alpha\| \leq 1$ *und*

$$\mathcal{E}_\alpha(f - G_\alpha f) \leq \mathcal{E}(f).$$

Insbesondere erhalten wir $\|f - \alpha G_\alpha f\|_2^2 \leq \alpha^{-1} \mathcal{E}(f)$.

Beweis. Die Aussagen folgen aus kurzen Rechnungen. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\alpha G_\alpha f\|_2^2 &= \alpha \langle G_\alpha f, \alpha G_\alpha f\rangle_2 \\ &= \langle f, \alpha G_\alpha f\rangle_2 - \mathcal{E}(G_\alpha f, \alpha G_\alpha f) \\ &\leq \|f\|_2 \|\alpha G_\alpha f\|_2. \end{aligned}$$

Das zeigt $\|\alpha G_\alpha\| \leq 1$. Für die andere Ungleichung rechnen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha(f - \alpha G_\alpha f) &= \mathcal{E}_\alpha(f) - 2\alpha \mathcal{E}_\alpha(f, G_\alpha f) + \alpha^2 \mathcal{E}_\alpha(G_\alpha f) \\ &= \mathcal{E}_\alpha(f) - 2\alpha \langle f, f\rangle_2 + \alpha^2 \langle f, G_\alpha f\rangle_2 \\ &= \mathcal{E}(f) - \alpha \langle f, f\rangle_2 + \alpha \langle f, \alpha G_\alpha f\rangle_2 \\ \text{(Cauchy-Schwarz)} \quad &\leq \mathcal{E}(f) - \alpha \langle f, f\rangle_2 + \alpha \|f\|_2 \|\alpha G_\alpha f\|_2 \\ (\|\alpha G_\alpha\| \leq 1) \quad &\leq \mathcal{E}(f). \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Beweis. (Eigenschaften der Resolvente). Wir haben eben schon gesehen, dass αG_α eine Kontraktion ist. Die selbstadjungiertheit folgt unmittelbar aus der Definition und aus der Symmetrie von $\mathcal{E}_\alpha$.

(a): Das ist einfach.

(b): Für $f \in W_0^1(M,\mu)$ folgt die Aussage aus dem vorigen Lemma. Zu beliebigem $f \in L^2(\mu)$ und $\varepsilon > 0$ wählen wir $g \in W_0^1(M,\mu)$ mit $\|f - g\|_2 < \varepsilon$ und erhalten

$$\begin{aligned} \|f - \alpha G_\alpha f\|_2 &\leq \|f - g\|_2 + \|\alpha G_\alpha (f - g)\|_2 + \|g - \alpha G_\alpha g\|_2 \\ &\leq 2\|f - g\|_2 + \|g - \alpha G_\alpha g\|_2 \\ &\leq 2\varepsilon + \|g - \alpha G_\alpha g\|_2. \end{aligned}$$

Für genügend große α ist die Rechte Seite kleiner als 3ε. Da ε beliebig war, liefert dies die gewünschte Aussage.

(c): Es genügt Bild $G_\alpha \subseteq D(\mathcal{L}^*)$ und $(\mathcal{L}^* + \alpha)G_\alpha f = f$ zu zeigen. Da $G_\alpha f \in W_0^1(M,\mu)$ existieren $\psi_n \in C_c^\infty(M)$, welche bezüglich $\mathcal{E}_\alpha$ gegen $G_\alpha f$ konvergieren. Für $\varphi \in D(\mathcal{L}) = C_c^\infty(M)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle G_\alpha f, \mathcal{L}\varphi\rangle_2 &= \lim_{n\to\infty} \langle \psi_n, \mathcal{L}\varphi\rangle_2 \\ \text{(Green'sche Formel)} &= \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(\psi_n, \varphi) \\ &= \mathcal{E}(G_\alpha f, \varphi) \\ &= \langle f, \varphi\rangle_2 - \alpha\langle G_\alpha f, \varphi\rangle_2. \end{aligned}$$

Dies beweist $G_\alpha f \in D(\mathcal{L}^*)$ und $\mathcal{L}^* G_\alpha f = f - \alpha G_\alpha f$. □

Wir definieren nun die für uns relevante selbstadjungierte Realisierung von $-\Delta_\mu$ und weisen nach, dass G_α die Resolvente davon ist.

Definition (Laplaceoperator mit verallgemeinerten Dirichlet-Randbedingungen)**.** Mit $L = L_\mu$ bezeichnen wir die Einschränkung von $\mathcal{L}_\mu$ auf den Definitionsbereich

$$D(L) := \{f \in W_0^1(M,\mu) \mid \Delta_\mu f \in L^2(\mu)\}.$$

Beispiel. (Übung) Ist $M = (a,b)$ ein offenes Intervall, versehen mit der euklidischen Metrik und dem Lebesgue-Maß, so gilt $W^1((a,b)) \subseteq C([a,b])$ (jede Funktion in $W^1((a,b))$ hat einen stetigen Repräsentanten, welcher sich stetig in die Randpunkte fortsetzen lässt). Es gilt

$$W_0^1((a,b)) = \{f \in W^1((a,b)) \mid f(a) = f(b) = 0\}.$$

und $D(\mathcal{L}^*) = \{f \in L^2((a,b)) \mid f'' \in L^2((a,b))\}$ mit $\mathcal{L}f = -f''$ (im distributionellen Sinne). Der Operator L ist also eine Einschränkung von $f \mapsto -f''$ und sein Definitionsbereich ist gegeben durch

$$D(L) = \{f \in L^2((a,b)) \mid f'' \in L^2((a,b)) \text{ und } f(a) = f(b) = 0\}.$$

Demnach entsteht L aus $\mathcal{L}$ durch hinzufügen von (Dirichlet-) Randbedingungen.

Analoges gilt auch auf offenen Teilmengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, deren topologischer Rand $\partial\Omega$ genügend glatt ist. Allerdings ist dann das bilden der Randwerte einer Funktion $f \in W^1(\Omega)$ nicht mehr so einfach.

Theorem. *Für $\alpha > 0$ ist $L+\alpha$ invertierbar und es gilt $(L+\alpha)^{-1} = G_\alpha$. Insbesondere ist der Operator ein positiver selbstadjungierter Operator auf $L^2(\mu)$ und für alle $f \in D(L)$, $g \in W_0^1(M,\mu)$ gilt*

$$\mathcal{E}(f,g) = \langle Lf, g\rangle_2.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für $\alpha > 0$ der Operator $L + \alpha$ invertierbar ist und $(L+\alpha)^{-1} = G_\alpha$ gilt. Dann folgt der Rest aus den Eigenschaften der Resolvente (Übung).

Da L eine Einschränkung von $\mathcal{L}^* + \alpha$ ist, folgt mit den schon gezeigten Eigenschaften der Resolvente $(L+\alpha)G_\alpha f = f$, $f \in L^2(\mu)$. Also ist

$L+\alpha$ surjektiv. Sei nun $f \in D(L)$. Wir berechnen $G_\alpha(L+\alpha)f$. Für $\varphi \in C_c^\infty(M)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\alpha(G_\alpha(L+\alpha)f, \varphi) &= \langle (L+\alpha)f, \varphi\rangle_2 \\ (L \subseteq \mathcal{L}^*) \quad &= \langle f, (\mathcal{L}+\alpha)\varphi\rangle_2 \\ (\text{Green'sche Formel}, f \in W_0^1(M,\mu)) \quad &= \mathcal{E}_\alpha(f,\varphi).\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir ein Approximationsargument und die Green'sche Formel verwendet, vergleiche den Beweis über die Eigenschaften von G_α. Da $C_c^\infty(M)$ dicht in $W_0^1(M,\mu)$ ist, erhalten wir $G_\alpha(L+\alpha)f = f$ und damit die Injektivität von $L+\alpha$, sowie die gewünschte Identität $(L+\alpha)^{-1} = G_\alpha$. □

Ende 18. Vorlesung

Als letzes zu L assoziiertes Objekt führen wir noch die von L erzeugt Halbgruppe $(T_t)_{t>0}$ ein. Formal ist sie definiert durch $T_t = e^{-tL}$ und erfüllt damit $\dot{T}_t = -LT_t$. Für einen beschränkten Operator A definiert man dazu wie erwartet

$$e^A := \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}A^n.$$

Diese Reihe konvergiert in der Operatornorm. Da L ein unbeschränkter Operator ist (Übung), gibt es allerdings bei der Definition der Exponentialfunktion über die Reihendarstellung Konvergenzprobleme. Stattdessen definieren wir für $t>0$ und $f \in L^2(\mu)$

$$T_t f := \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t}\right)^n G_{n/t}^n f = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}L\right)^{-n} f,$$

falls der Grenzwert existiert. Die Familie von Operatoren $(T_t)_{t>0}$ heißt zu L assoziierte Halbgruppe.

Theorem (Eigenschaften der Halbgruppe, Hille-Yosida)**.** *Für alle $t>0$ und $f \in L^2(\mu)$ existiert $T_t f$ und es ist $T_t : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator mit $\|T_t\| \le 1$. Ferner gilt:*

(a) Es gilt $T_tT_s = T_{t+s}$ für alle $t,s>0$. ('Halbgruppeneigenschaft')

(b) Es gilt $\lim_{t\to 0} T_t f = f$ für alle $f \in L^2(\mu)$. ('Starke Stetigkeit')

(c) Es gilt

$$D(L) = \{f \in L^2(\mu) \mid \lim_{h\to 0+} h^{-1}(T_h f - f) \text{ ex.}\}$$

und $-Lf = \lim_{h\to 0+} h^{-1}(T_h f - f)$. ('L ist der Erzeuger von (T_t)')

(d) Für alle $f \in L^2(\mu)$ gehört die Abbildung $H_f : (0,\infty) \to L^2(\mu), t \mapsto T_t f$ zu $C^\infty((0,\infty); L^2(\mu))$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s>0$ gilt $H_f(s) \in$

$D(L^n)$ *und*

$$\frac{d^n}{dt^n} H_f(s) = (-L)^n H_f(s).$$

Bemerkung. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so ist die Ableitung einer Funktion $H : I \to L^2(\mu)$ in $s \in I$ definiert durch

$$\frac{d}{dt} H(s) := \dot{H}(s) := \lim_{h \to 0} h^{-1}(H(s+h) - H(s)),$$

falls der Grenzwert in $L^2(\mu)$ existiert.

Beweis. Existenz von T_t: Wir setzen

$$T_{n,t} := \left(\frac{n}{t}\right)^n G^n_{n/t} = \left(1 + \frac{t}{n} L\right)^{-n}, t > 0,$$

und $T_{n,0} = 1$. Wegen der Eigenschaften der Resolventen gilt

$$\|(1 + t/nL)^{-1}\| = n/t \|(n/t + L)^{-1}\| \leq 1$$

und damit $\|T_{n,t}\| \leq 1$. Wir zeigen zunächst für $f \in D(L)$ und $t \geq 0$ die Identität

$$\dot{T}_{n,t} f = -T_{n+1,t(n+1)/n} Lf,$$

wobei bei $t = 0$ der rechtsseitige Grenzwert gebildet wird. Dazu setzen wir $L_{n,t} := 1 + t/nL$ und rechnen

$$\begin{aligned} T_{n,t+h} f - T_{n,t} f &= T_{n,t+h} \left(L^n_{n,t} - L^n_{n,t+h}\right) T_{n,t} f \\ &= T_{n,t+h} \left((L_{n,t} - L_{n,t+h}) \sum_{k=0}^{n-1} L^{n-k-1}_{n,t} L^k_{n,t+h} \right) T_{n,t} f \\ &= -T_{n,t+h} \left(\frac{h}{n} L \sum_{k=0}^{n-1} L^{n-k-1}_{n,t} L^k_{n,t+h} \right) T_{n,t} f. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} h^{-1}(T_{n,t+h} f - T_{n,t} f) &= -T_{n,t} \left(L L^{n-1}_{n,t}\right) T_{n,t} f. \\ &= -T_{n+1,t(n+1)/n} Lf. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass für $f \in D(L^2)$ die Folge $(T_{n,t} f)$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\mu)$ ist. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} T_{n,t} f - T_{m,t} f &= \int_0^t \frac{d}{ds} T_{n,t-s} T_{m,s} f ds \\ &= \int_0^t (T_{n+1,(t-s)(n+1)/n} T_{m,s} - T_{n,(t-s)} T_{m+1,s(m+1)/m}) Lf ds. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
&(T_{n+1,(t-s)(n+1)/n} - T_{n,(t-s)})Lf \\
&= \left(\left(1 + \frac{n+1}{n}\frac{t-s}{n+1}L\right)^{-(n+1)} - \left(1 + \frac{t-s}{n}L\right)^{-n}\right) Lf \\
&= \left(1 + \frac{t-s}{n}L\right)^{-(n+1)} (1 - 1 - \frac{t-s}{n}L)Lf \\
&= \frac{t-s}{n}\left(1 + \frac{t-s}{n}L\right)^{-(n+1)} L^2 f.
\end{aligned}$$

Wegen der Kontraktionseigenschaft der Resolventen erhalten wir

$$\|(T_{n+1,(t-s)(n+1)/n} - T_{n,(t-s)})Lf\|_2 \le \frac{t-s}{n}\|L^2 f\|_2.$$

Eine analoge Rechnung zeigt

$$\|T_{m+1,s(m+1)/m}Lf - T_{m,s}Lf\|_2 \le \frac{s}{m}\|L^2 f\|_2.$$

Einsetzen dieser Ungleichung in das Integral und das nutzen der Kontraktionseigenschaft von $T_{n,t}$ liefert

$$\|T_{n,t}f - T_{m,t}f\|_2 \le t^2(1/m + 1/n)\|L^2 f\|_2.$$

Demnach existiert $T_t f$ für $f \in D(L^2)$. Seien nun $f \in L^2(\mu)$ und $g \in D(L^2)$ beliebig. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|T_{n,t}f - T_{m,t}f\|_2 &\le \|T_{n,t} - T_{m,t}\|\|f - g\|_2 + \|T_{n,t}g - T_{m,t}g\|_2 \\
&\le 2\|f - g\|_2 + \|T_{n,t}g - T_{m,t}g\|_2.
\end{aligned}$$

Da $D(L^2)$ dicht in $L^2(\mu)$ liegt (z.B. gehört $C_c^\infty(M)$ zu $D(L^2)$) folgt die Existenz von $T_t f$ für alle $f \in L^2(\mu)$. Für später ist es wichtig festzuhalten, dass die Konvergenz von $T_{n,t}f$ gegen $T_t f$ gleichmäßig auf kompakten Intervallen ist. Die Eigenschaft $\|T_t\| \le 1$ und die Symmetrie folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von $T_{n,t}$.

Ende 19. Vorlesung

Dieser Abschnitt muss noch korrigiert werden!

(a) Halbgruppeneigenschaft: Es gilt (Übung)

$$T_{n,t}T_{n,s} = \left(1 + \frac{t+s}{n}L + \frac{ts}{n^2}L^2\right)^{-n},$$

wobei $1 + \frac{t+s}{n}L + \frac{ts}{n^2}L^2$ den Definitionsbereich $D(L^2)$ hat. Da $\frac{t+s}{n}L + \frac{ts}{n^2}L^2$ ein nichtnegativer selbstadjungierter Operator ist, gilt nach dem Fundamentallemma des Spektralkalküls

$$\left\|\left(1 + \frac{t+s}{n}L + \frac{ts}{n^2}L^2\right)^{-1}\right\| \le 1.$$

Dementsprechend konvergiert $T_{n,t+s} - T_{n,t}T_{n,s}$ gegen 0, für $n \to \infty$.

(b) Starke Stetigkeit: Für $f \in D(L^2)$ haben wir oben schon die Abschätzung

$$\|T_t f - T_{n,t} f\|_2 \leq \frac{t^2}{n}\|L^2 f\|_2$$

bewiesen. Für allgemeines $f \in L^2(\mu)$ und $g \in D(L^2)$ lässt sich $\|T_t f - f\|$ abschätzen durch

$$\begin{aligned}
&\|T_t f - T_t g\|_2 + \|T_t g - T_{n,t} g\|_2 + \|T_{n,t} g - g\|_2 + \|f - g\|_2 \\
&\leq 2\|f-g\|_2 + \frac{t^2}{n}\|L^2 g\|_2 + \|T_{n,t} g - g\|_2.
\end{aligned}$$

Da $D(L^2)$ dicht in $L^2(\mu)$ ist und $T_{n,t} g \to g$, $t \to 0$, (Übung) erhalten wir die starke Stetigkeit.

(c) + (d): 1. Wir setzen $T_0 := 1$ und beweisen zunächst die Identität

$$\dot{T}_t f = -T_t L f$$

für $f \in D(L)$ und $t \geq 0$. Wir haben oben gesehen $T_{n,t} f \to T_t f$ gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von $[0,\infty)$ und $\dot{T}_{n,t} f \to -T_t L f$ gleichmäßig auf kompakten Teilintervallen von $[0,\infty)$. Deshalb ist $[0,\infty) \to L^2(\mu)$, $t \mapsto T_t f$ differenzierbar und es gilt $\dot{T}_t f = -T_t L f$.

2. Wir beweisen nun $T_t f \in D(L)$ für alle $f \in L^2(\mu)$ und $t > 0$. Da L selbstadjungiert ist, genügt es zu zeigen, dass die Abbildung

$$D(L) \to \mathbb{R},\ g \mapsto \langle T_t f, Lg\rangle_2$$

stetig bezüglich $\|\cdot\|_2$ ist. Es gilt $\langle T_{n,t} f, Lg\rangle_2 = \langle f, T_{n,t} Lg\rangle_2$ und das Fundamentallemma des Spektralkalküls liefert zusammen mit $\sigma(A) \subseteq [0,\infty)$, dass

$$\|T_{n,t} Lg\|_2 = \|L(1 + t/nL)^{-n} g\|_2 \leq \sup_{\lambda \geq 0} \frac{\lambda}{(1 + (\lambda t)/n)^n}\|g\|_2.$$

Da sich die Rechte Seite dieser Ungleichung unabhängig von n abschätzen lässt (Bernoulli-Ungleichung), ist die gewünschte Stetigkeit und damit $T_t f \in D(L)$ nachgewiesen.

3. Als nächstes zeigen wir $LT_t f = T_t L f = -\dot{T}_t f$ für $f \in D(L)$ und $t \geq 0$. Für $g \in D(L)$ gilt nach 1.

$$\begin{aligned}
\langle LT_t f, g\rangle_2 &= \langle f, T_t Lg\rangle \\
&= -\lim_{h\to 0} h^{-1}\langle f, T_{t+h} g - T_t g\rangle_2 \\
&= -\lim_{h\to 0} h^{-1}\langle T_{t+h} f - T_t f, g\rangle_2 \\
&= -\langle \dot{T}_t f, g\rangle \\
&= \langle T_t L f, g\rangle.
\end{aligned}$$

1. und 3. beweist (c).

4. Nun beweisen wir $LT_tf = -\dot{T}_tf$ für $f \in L^2(\mu)$, $t > 0$. Dazu berechnen wir unter Verwendung von 3. und $T_tf \in D(L)$

$$\lim_{h\to 0+} h^{-1}(T_{t+h}f - T_tf) = \lim_{h\to 0+} h^{-1}(T_h - 1)T_tf = -LT_tf$$

und (für kleine $\delta > 0$)

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+}(-h)^{-1}(T_{t-h}f - T_tf) &= \lim_{h\to 0+} h^{-1}(T_tf - T_{t-h}f)\\
&= \lim_{h\to 0+} T_{t-h-\delta}(h^{-1}(T_h - 1)T_\delta f)\\
(!) &= -T_{t-\delta}LT_\delta f\\
&= -LT_tf.
\end{aligned}$$

Bei (!) haben wir verwendet, dass die Abbildung $[0,\infty) \times L^2(\mu) \to L^2(\mu), (t,f) \mapsto T_tf$ stetig ist. Dies folgt aus der starken Stetigkeit von (T_t), der Halbgruppeneigenschaft und der gleichmäßigen Beschränktheit von (T_t) (Übung).

5. Es bleibt noch die höhere Differenzierbarkeit zu zeigen. Angenommen die Funktion H_f ist n-mal differenzierbar und es gilt

$$\frac{d^n}{dt^n}H_f(s) = (-L)^nH_f(s).$$

Mit dem bereits gezeigtem erhalten wir

$$\frac{d^n}{dt^n}H_f(s) = (-L)^nT_sf = T_{s-\delta}(-L)^nT_\delta f$$

Deswegen ist H_f auch $(n+1)$-mal differenzierbar und es gilt

$$\frac{d^n}{dt^n}H_f(s) = \dot{T}_{s-\delta}(-L)^nT_\delta f = -LT_{s-\delta}(-L)^nT_\delta f = (-L)^{n+1}T_sf.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Im Beweis haben wir nur an einer Stelle die konkrete Gestalt von L benutzt, nämlich um zu zeigen, dass der Operator L^2 dicht definiert ist. Tatsächlich stimmt der Satz für beliebige nichtnegative selbstadjungierte Operatoren.

Wir lernen nun weitere Eigenschaften von Resolvente und Halbgruppe kennen. Dazu benötigen wir aber noch folgendes Lemma.

Lemma ($\mathcal{E}_\alpha$ ist Markoffsch)**.** *Es sei $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte beschränkte Funktion mit $|C(x) - C(y)| \le |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, und $|C(0)| = 0$. Für $f \in W_0^1(M,\mu)$ gilt $C \circ f \in W_0^1(M,\mu)$ und*

$$\mathcal{E}_\alpha(C \circ f) \le \mathcal{E}_\alpha(f).$$

Bemerkung. Eine Funktion $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $C(0) = 0$ und $|C(x) - C(y)| \le |x - y|$ heißt *normale Kontraktion.* Die Kompatibilität von $\mathcal{E}$ mit normalen Kontraktionen ist eine fundamentale Eigenschaft auf der ein Großteil der unten entwickelten Theorie beruht.

Beweis. Da $|C(x)| = |C(x)-C(0)| \leq |x-0| = |x|$ gilt $\|C\circ f\|_2 \leq \|f\|_2$. Da C eine 1-Lipschitz-Funktion ist gilt weiterhin $|C'| \leq 1$. Mit der Kettenregel erhalten wir $C \circ f \in W_0^1(M,\mu)$ und

$$|\nabla(C \circ f)| = |C' \circ f||\nabla f| \leq |\nabla f|.$$

Daraus folgt die gewünschte Aussage. □

Ende 20. Vorlesung

Theorem (Resolvente und Halbgruppe sind Markoffsch)**.** *Für $f \in L^2(\mu)$ mit $0 \leq f \leq 1$ gilt $0 \leq \alpha G_\alpha f \leq 1$, $\alpha > 0$, und $0 \leq T_t f \leq 1$, $t > 0$.*

Beweis. Es genügt die Aussage für die Resolvente zu zeigen. Sei $f \in L^2(\mu)$ mit $0 \leq f \leq 1$. Wir betrachten das Funktional

$$F_\alpha : W_0^1(M,\mu) \to \mathbb{R},\ F_\alpha(g) := \mathcal{E}(g) + \alpha\|g-f\|_2^2.$$

Aus der Definition der Resolvente folgt

$$F_\alpha(g) = F_\alpha(\alpha G_\alpha f) + \mathcal{E}_\alpha(g - \alpha G_\alpha f), \quad g \in W_0^1(M,\mu).$$

Dementsprechend ist $\alpha G_\alpha f$ der eindeutige Minimierer des Funktionals F_α. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir nun eine glatte beschränkte normale Kontraktion C_ε, welche $-\varepsilon \leq C \leq 1+\varepsilon$ und $C(x) = x$, $x \in [0,1]$, erfüllt. Aufgrund der Markoffeigenschaft von $\mathcal{E}$ gilt $C_\varepsilon \circ (\alpha G_\alpha f) \in W_0^1(M,\mu)$, sowie $\mathcal{E}(C_\varepsilon \circ (\alpha G_\alpha f)) \leq \mathcal{E}(\alpha G_\alpha f)$. Da C_ε eine normale Kontraktion mit $C_\varepsilon \circ f = f$ ist, gilt weiterhin

Existenz durch Zeichnung, Übung

$$\|C_\varepsilon \circ (\alpha G_\alpha f) - f\|_2 = \|C_\varepsilon \circ (\alpha G_\alpha f) - C_\varepsilon \circ f\|_2 \leq \|\alpha G_\alpha f - f\|_2.$$

Dementsprechend ist $C_\varepsilon \circ (\alpha G_\alpha f)$ auch ein Minimierer von F_α und es folgt $C_\varepsilon \circ (\alpha G_\alpha f) = \alpha G_\alpha$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir die gewünschte Ungleichung $0 \leq \alpha G_\alpha f \leq 1$. □

Folgerung (Resolvente und Halbgruppe sind Positivitätserhaltend)**.** *Für alle $f \in L^2(\mu)$ mit $f \geq 0$ gilt $G_\alpha f \geq 0, \alpha > 0$, und $T_t f \geq 0$, $t > 0$.*

Mithilfe dieser Eigenschaft lassen sich Resolvente und Halbgruppe auf alle L^p-Räume fortsetzen. Das wird als nächstes besprochen.

Sei dazu $T : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ ein postivitätserhaltender Operator, d.h. $f \geq 0$ impliziert $Tf \geq 0$. Ist $f \in L^0(\mu)$ eine (fast überall definierte) nichtnegative Borelmessbare Funktion, so wählen wir eine monoton wachsende Folge (f_n) in $L^2(\mu)$, mit $f_n \to f$ μ-fast sicher und definieren

$$\widetilde{T} f := \lim_{n\to\infty} T f_n.$$

Aufgrund der Positivitätserhaltung existiert dieser Grenzwert μ-fast überall. Er ist außerdem unabhängig von der Wahl der Folge (f_n) (Übung). Wir definieren nun

$$\operatorname{dom}(\widetilde{T}) := \{f \in L^0(\mu) \mid \widetilde{T}|f| < \infty \, \mu\text{-fast überall}\}$$

sowie

$$\widetilde{T} : \operatorname{dom}(\widetilde{T}) \to L^0(\mu), \, \widetilde{T}f := \widetilde{T}f_+ - \widetilde{T}f_-.$$

Dies ist eine Fortsetzung von T. Im folgenden lassen wir meist die Tilde weg und schreiben nur T für den gegebenen Operator sowie seine Fortsetzung.

Theorem. *Für alle $\alpha, t > 0$ und $p \in [0, \infty]$ gilt*

$$\|\alpha G_\alpha \mid L^p(\mu) \to L^p(\mu)\| \le 1 \textit{ und } \|T_t \mid L^p(\mu) \to L^p(\mu)\| \le 1.$$

Bemerkung. Ds Theorem ist so zu lesen: Es gelten die Inklusionen

$$L^p(\mu) \subseteq \operatorname{dom}(G_\alpha), \, L^p(\mu) \subseteq \operatorname{dom}(T_t)$$

und

$$G_\alpha L^p(\mu) \subseteq L^p(\mu), \, T_t L^p(\mu) \subseteq L^p(\mu)$$

und die induzieren Abbildungen $L^p(\mu) \to L^p(\mu)$ sind Kontraktionen.

Beweis. $L^\infty(\mu)$: Das folgt direkt aus der Markoffeigenschaft.

$L^1(\mu)$: Das folgt mittels Dualität und einem Approximationsargument (Übung).

$L^p(\mu)$: Das folgt mittels Riesz-Thorin-Interpolation (Übung*). □

Die eigentliche Relevanz der Halbgruppe ergibt sich aus folgender Bemerkung.

Bemerkung. Es existiert ein eindeutiger stochastischer Prozess (B_t) auf der Einpunkkompaktifizierung $M \cup \{\infty\}$, mit der Eigenschaft, dass für alle messbaren $A \subseteq M$, alle $t > 0$ und μ-fast alle $x \in M$ gilt

$$\mathbb{P}(B_t \in A \mid B_0 = x) = T_t 1_A(x).$$

Dieser Prozess (B_t) heißt *minimale brownsche Bewegung* auf (M, g, μ). Zeichnung
Vollständig können wir dies hier nicht beweisen. Wir werden aber unten sehen, dass wir glatte Versionen von $T_t 1_A$ wählen können, sodass für alle $x \in M$ die Abbildung $A \mapsto T_t 1_A(x)$ ein sub-Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Wir bezeichnen mit $L^\infty_*(\mu)$ den Raum $L^\infty(\mu)$ ausgestattet mit der schwach-*-Topologie. Eine Folge (f_n) konvergiert darin, falls

$$\lim_{n \to \infty} \int_M f_n g \, \mathrm{d}\mu = \int_M fg \, \mathrm{d}\mu, \text{ für alle } g \in L^1(\mu).$$

Im folgendes Satz bezeichnen wir mit $(T_t^{(p)})$ die Fortsetzung der Halbgruppe auf $L^p(\mu)$.

Theorem (Eigenschaften der Halbgruppe auf $L^p(\mu)$)**.** *Sei* $1 \leq p \leq \infty$.

(a) Es gilt $T_t^{(p)} T_s^{(p)} = T_{t+s}^{(p)}$ *für alle* $t, s > 0$. *('Halbgruppeneigenschaft')*

(b) Falls $1 \leq p < \infty$ *gilt für alle* $f \in L^p(\mu)$, *dass* $\lim_{t\to 0} T_t^{(p)} f = f$ *in* $L^p(\mu)$. *('Starke Stetigkeit')*

(c) Für alle $f \in L^\infty(\mu)$ *gilt* $\lim_{t\to 0} T_t^{(\infty)} f = f$ *in* $L_*^\infty(\mu)$. *('Schwach-*-Stetigkeit')*

(d) Falls $1 < p < \infty$, *so gehört für alle* $f \in L^p(\mu)$ *die Abbildung*

$$H_f^{(p)} : (0, \infty) \to L^p(\mu), t \mapsto T_t^{(p)} f$$

zu $C^\infty((0,\infty); L^p(\mu))$. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $s > 0$ *gilt*

$$\frac{d^n}{dt^n} H_f^{(p)}(s) = (\Delta_\mu)^n H_f^{(p)}(s),$$

wobei die Ableitungen in $L^p(\mu)$ *gebildet werden.*

Beweis. (a): Das folgt einfach aus der Halbgruppeneigenschaft von $(T_t^{(2)})$ und der Definition von $(T_t^{(p)})$.

(b),(c),(d): Dies folgt mittels Interpolation. □

Wir untersuchen nun Eigenschaften von $L, (G_\alpha), (T_t)$, wobei wir besonderen Wert auf den Einfluss der Geometrie der Mannigfaltigkeit legen. Konkret beschäftigen wir uns mit den folgenden Fragen.

- Hat $\mathcal{L}$ höchstens eine selbstadjungierte Fortsetzung? Ist dies der Fall, so gibt es höchstens eine Brownsche Bewegung auf M.
- Wo liegt das Spektrum von L und welche Art hat es?
- Ist (T_t) stochastisch vollständig, d.h. gilt $T_t 1 = 1$ (bleibt (B_t) für alle Zeiten auf M bzw. ist $A \mapsto T_t 1_A(x)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß)?
- Ist (T_t) rekurrent oder transient (kehrt (B_t) unendlich oft in jede beschränkte offene Teilmenge zurück oder nicht)?

$\longleftrightarrow$
Ende 21. Vorlesung

6. Lokale Regularitätstheorie

Dieses Kapitel behandelt lokale Glattheitsaussagen schwacher Lösungen zu linearen Differentialgleichungen der Form

$$Pu = f$$

auf einer Mannigfaltigkeit. Dabei ist P entweder der (gewichtete) distributionelle Laplace-Beltrami-Operator oder der Wärmeoperator (s.u). Wir zeigen (bzw. skizzieren), dass gewisse schwache Lösungen zu guten rechten Seiten bereits starke Glattheitseigenschaften haben.

Theorem (Δ_μ ist hypoelliptisch auf $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$)**.** *Es sei (M, g, μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit und $\alpha \in \mathbb{R}$. Ist $f \in C^\infty(M)$ und $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ mit*

$$\Delta_\mu u + \alpha u = f,$$

so gilt $u \in C^\infty(M)$ (genauer: u hat eine Version in $C^\infty(M)$).

Wir halten zuerst eine wichtige Folgerung fest.

Folgerung (Eigenfunktionen sind glatt)**.** *Es sei λ ein Eigenwert von L und f eine zugehörige Eigenfunktion mit $Lf = \lambda f$. Dann gilt $f \in C^\infty(M)$.*

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir ein paar klassische Resultate über Sobolev-Räume im $\mathbb{R}^n$, die wir hier nicht beweisen.

Im folgenden ist Ω stets eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ausgestattet mit dem Lebesgue-Maß. Mit ∂_i bezeichnen wir die distributionellen partiellen Ableitungen auf Ω und mit ∂^α deren Hintereinanderausführung bezüglich eines Multiindex α. Der lokale Sobolev-Räume k-ter Ordnung ist definiert durch

$$W^k_{\mathrm{loc,\,e}}(\Omega) := \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \mid \partial^\alpha f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \text{ für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k\}.$$

Der folgende Satz behandelt Glattheitseigenschaften von Funktionen in lokalen Sobolev-Räumen, siehe [**1**, Theorem 6.1]. Es handelt sich um einen der bemerkenswertesten Sätze der Analysis.

Proposition (Sobolevscher Einbettungssatz)**.** *Es sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Für*

$$k > m + \frac{n}{2}$$

gilt $W^k_{\mathrm{loc,\,e}}(\Omega) \subseteq C^m(\Omega)$ (genauer: jede Funktion aus $W^k_{\mathrm{loc,\,e}}(\Omega)$ hat eine Version in $C^m(\Omega)$).

Bemerkung.

- Der Sobolevsche Einbettungssatz sagt, dass die Glattheit einer Funktion aus der Existenz (in L^2_{loc}) genügend vieler schwacher Ableitungen folgt.
- Tatsächlich gibt der Sobolevsche Einbettungssatz auch noch Abschätzungen für die Normen der Funktionen in den entsprechenden Funktionenräumen. Wir benötigen jedoch nur die Glattheitsaussage.

Für $1 \leq i, j \leq n$ sei $a^{ij} \in C^\infty(\Omega)$. Die Matrixwertige Funktion (a^{ij}) heißt *elliptisch*, falls sie symmetrisch in i, j ist und es zu jedem Punkt $x \in \Omega$ eine Konstante $c(x) > 0$ gibt, mit

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c(x)|\xi|^2 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Ein einfaches Beispiel ist $a^{ij}(x) = \delta^{ij}$. In diesem Fall kann $c \equiv 1$ gewählt werden. Zu einer gegebenen glatten elliptischen Matrixfunktion (a^{ij}) assoziieren wir den *elliptischen Operator* $A : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ durch

$$\langle Au, \varphi \rangle := \langle u, \partial_j(a^{ij}\partial_i\varphi)\rangle.$$

Nach Definition der distributionellen partiellen Ableitungen gilt also

$$Au = \partial_i(a^{ij}\partial_j u).$$

Der folgende Satz ist enthalten in [**1**, Theorem 6.9].

Proposition (Gårdings Satz)**.** *Es sei A ein elliptischer Operator wie oben. Für alle $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $Au \in W^m_{\mathrm{loc,\,e}}(\Omega)$ gilt $u \in W^{m+2}_{\mathrm{loc,\,e}}(\Omega)$.*

Bemerkung.
- Gårdings Satz ist auch als Gårdings Ungleichung bekannt, da er eigentlich explizite Abschätzungen für die entsprechenden (lokalen) Normen liefert. Auch hier reicht uns aber die Glattheitsaussage.
- Wir skizzieren hier kurz die Aussage des Satzes für $m = 0$. Es gilt $u \in W^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ genau dann, wenn für jede Kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ gilt

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} \int_K |\partial^\alpha u|^2 \,\mathrm{d}\lambda < \infty.$$

Es ist $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $Au \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) = W^0_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ genau dann, wenn für jede Kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ gilt

$$\int_K |u|^2 \,\mathrm{d}\lambda + \int_K \left| \sum_{i,j=1}^n \partial_i(a^{ij}\partial_j u)\right|^2 \mathrm{d}\lambda < \infty.$$

Unterschiede diskutieren

Gårdings Satz zeigt also, dass man lokal die L^2-Norm der gemischten Ableitungen durch die L^2-norm und die Norm der höchsten Ableitungen kontrollieren kann.

Als Folgerung aus beiden Sätzen erhalten wir das folgende Hauptlemma für den Beweis der Hypoelliptizität von Δ_μ.

Lemma. *Es sei A ein elliptischer Operator und $b : \Omega \to (0, \infty)$ eine glatte Funktion. Ist $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ und $(bA)^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Beweis. Wir beweisen $u \in W^{2k}_{\mathrm{loc,\,e}}(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, was mit dem Sobolevschen Einbettungssatz $u \in C^\infty(\Omega)$ liefert.

Wir benutzen folgende Beobachtung, welche aus der Produktregel folgt: Für alle $k \in \mathbb{N}$, $\rho \in C^\infty(\Omega)$ und $u \in W^k_{\mathrm{loc,\,e}}(\Omega)$ gilt $\rho u \in W^k_{\mathrm{loc,\,e}}(\Omega)$.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Voraussetzung gilt $(bA)^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Da b glatt und strikt positiv ist, erhalten wir

$$A(bA)^{k-1} u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Aus Gårdings Satz folgt $(bA)^{k-1}u \in W^2_{\mathrm{loc,\,e}}(\Omega)$. Da b glatt und strikt positiv ist, gilt mit der Beobachtung von oben angewendet auf $\rho = b^{-1}$, dass

$$A(bA)^{k-2} u \in W^2_{\mathrm{loc,\,e}}(\Omega).$$

Eine erneute Anwendung von Gårdings Satz liefert $(bA)^{k-2} \in W^4_{\mathrm{loc,\,e}}(\Omega)$. Die Iteration dieses Arguments zeigt schließlich $u \in W^{2k}_{\mathrm{loc,\,e}}(\Omega)$. $\square$

Lemma (Regularitätslemma)**.** *Ist $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ mit $\Delta^k_\mu u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $u \in C^\infty(M)$.*

Beweis. Sei (U, φ) eine Karte mit lokalen Koordinatenfunktionen (x^i). In in ihr gilt die folgende distributionelle Gleichung für die Einschränkung von u auf U:

$$\Delta_\mu u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}u\right),$$

wobei $\rho = \Upsilon\sqrt{\det(g_{ij})}$ (Übung).

Wir setzen $\bar{\rho} := \rho \circ \varphi^{-1}$, $\bar{g}^{ij} := g^{ij} \circ \varphi^{-1}$ und $\bar{u} := u \circ \varphi^{-1}$. Sei A der elliptische Operator zur glatten elliptischen Matrixfunktion $(\rho\bar{g}^{ij})$. Wir haben bereits beim Beweis der Aussage $W^1_c(M,\mu) \subseteq W^1_0(M,\mu)$ beobachtet, dass

$$\frac{\partial}{\partial x^i}u = (\partial_i \bar{u}) \circ \varphi$$

im Sinne von L^2_{loc}-Funktionen (aufgefasst als Distributionen). Es folgt also

$$(A\bar{u}) \circ \varphi = \rho \Delta_\mu u.$$

Wir beweisen nun $\bar{u} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\varphi(U))$ und $(\bar{\rho}^{-1}A)^k \bar{u} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\varphi(U))$ für alle $k \in \mathbb{N}$, was nach dem vorigen Lemma die gewünschte Aussage liefert. Diese Eigenschaften folgen aber direkt aus den Identitäten

$$\int_V |u|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_{\varphi(V)} |\bar{u}|^2 \rho \,\mathrm{d}\lambda,$$

und

$$\int_V |\Delta^k_\mu u|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_{\varphi(V)} |(\rho^{-1}A)^k \bar{u}|^2 \rho \,\mathrm{d}\lambda,$$

welche für alle messbaren $V \subseteq U$ gelten. $\square$

Beweis. Δ_μ *ist hypoelliptisch auf* $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Es seien $f \in C^\infty(M)$ und $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ mit

$$\Delta_\mu u + \alpha u = f$$

gegeben. Nach dem vorigen Lemma genügt es $(\Delta_\mu)^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}(U, \mu)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ zu zeigen.

Für $k = 1$ folgt die Aussage aus der Gleichung

$$\Delta_\mu u = f - \alpha u,$$

und den Eigenschaften von u und f. Ist $(\Delta_\mu)^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}(U, \mu)$, so erhalten wir

$$(\Delta_\mu)^{k+1} u = (\Delta_\mu)^k (f - \alpha u) = (\Delta_\mu)^k f - \alpha (\Delta_\mu)^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}(U, \mu).$$

Dies beendet den Beweis. $\square$

Wir diskutieren nun ähnliche Aussagen für den Wärmeoperator. Dabei verzichten wir vollständig auf Beweise und verweisen auf [**1**, Kapitel 6.4 und Kapitel 7.1]. Es sei (M, g, μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Für $T \in (0, \infty]$ sei $N := (0, T) \times M$ das riemannsche Produkt ausgestattet mit dem Produktmaß $\nu := \lambda \otimes \mu$, wobei λ das Lebesgue-Maß ist. Auf $\mathcal{D}'(N)$ definieren wir die Zeitableitung $\partial_t : \mathcal{D}'(N) \to \mathcal{D}'(N)$ durch

$$\langle \partial_t u, \varphi \rangle = -\langle u, \partial_t \varphi \rangle,$$

wobei ∂_t auf $\mathcal{D}(N)$ die übliche Ableitung nach der ersten Koordinate ist. Der gewichtete Laplace-Operator Δ_μ operiert auch auf $\mathcal{D}'(N)$ mittels

$$\langle \Delta_\mu u, \varphi \rangle = \langle u, \Delta_\mu \varphi \rangle,$$

wobei für $\varphi \in \mathcal{D}(N)$ die Funktion $\Delta_\mu \varphi$ gegeben ist durch

$$(\Delta_\mu \varphi)(x, t) := (\Delta_\mu \varphi(t, \cdot))(x).$$

Kurz gesagt operiert Δ_μ nur auf der Raum-Komponente und ∂_t nur auf der Zeit-Komponente. Der Operator $\mathcal{P} := \partial_t - \Delta_\mu$ heißt *Wärmeoperator.*

Der Wärmeoperator ist in lokalen Koordinaten nicht elliptisch, deshalb ist die Regularitätstheorie von oben nicht direkt auf ihn anwendbar. Trotzdem gilt folgender Satz, siehe [**1**, Theorem 7.4].

Theorem (Hypoelliptizität von $\mathcal{P}$)**.** *Es sei* (M, g, μ) *eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit,* $T \in (0, \infty]$ *und* $N := (0, T) \times M$. *Gilt* $u \in \mathcal{D}'(N)$ *und* $\partial_t u - \Delta_\mu u \in C^\infty(N)$, *so folgt* $u \in C^\infty(N)$.

7. Wärmeleitung auf L^p und Brownsche Bewegung

In diesem Kapitel wenden wir die Regularitätstheorie auf die Wärmeleitungsgleichung auf $L^p(\mu)$ für $1 \le p \le \infty$ an.

Definition (Lösungen zur Wärmeleitungsgleichung)**.** Es sei (M, g, μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit, $T \in (0, \infty]$, $1 \le p < \infty$, sowie $R \in \{L^p(\mu), L^p_{\mathrm{loc}}(\mu), L^\infty_*(\mu)\}$. Eine Funktion $u \in C^\infty(N)$ heißt *Lösung zur Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert* $f \in R$, falls

$$\partial_t u - \Delta_\mu u = \mathcal{P}u = 0$$

und

$$u(t, \cdot) \to f \text{ in } R, \text{ für } t \to 0+ .$$

Bemerkung (Interpretation Wärmeleitungsgleichung)**.** Eine Diffusion ist ein Mechanismus, der unterschiedliche Stoffkonzentrationen (bzw. Wäremeverteilungen) ausgleicht. Für $t > 0$ sei $u(t, \cdot) : M \to \mathbb{R}$ die Stoffkonzentration (Wärmedichte) zum Zeitpunkt t. Die Zeitevolution von u während der Diffusion auf M hängt von einer Familie von Vektorfeldern $F(t, \cdot)$ und einer Familie von Funktionen $f(t, \cdot)$ ab. Dabei gibt $F(t, x)$ an, in welche Richtung und in welchem Ausmaß zum Zeitpunkt t Stoff durch x fließt, und $f(t, x)$ gibt an, wieviel zusätzlicher Stoff am Punkt x zum Zeitpunkt t in das System gespeist wird. Ist $\Omega \subseteq M$ offen, mit glattem (orientierbaren) Rand, so gilt

Interpretieren

$$\frac{d}{dt}\bigg|_s \int_\Omega u(\cdot, x) d\mu(x) = -\int_{\partial\Omega} \langle F(s, x), \nu(x)\rangle d\mathrm{vol}_{\partial\Omega}(x) + \int_\Omega f(x, s) d\mu(x).$$

Hier bezeichnet ν die äußere normale an $\partial\Omega$. Der Gauß'sche Integralsatz liefert

$$\frac{d}{dt}\bigg|_s \int_\Omega u(\cdot, x) d\mu(x) = \int_\Omega -\mathrm{div}_\mu F(s, x) + f(s, x) d\mu(x),$$

und da $\Omega \subseteq M$ beliebig,

$$\dot{u}(t, x) = -\mathrm{div}_\mu F(x, t) + f(x, t), \quad x \in M, t > 0.$$

Im einfachsten Modell ist die Änderung der Kozentration u Proportional zum negativen ihres Gradienten (Ficksches Diffusionsgesetz), d.h. $F(t, x) = -\nabla u(t, x)$, und es findet keine Stoffzufuhr/abfuhr statt. In diesem Fall wird Diffusion gerade durch die oben besprochene Wärmeleitungsgleichung beschrieben.

Der folgende Satz zeigt, dass die Halbgruppen gute Lösungen zur Wärmeleitungsgleichung liefern.

Theorem. *Es sei* $p \in [1, \infty]$ *und* $f \in L^p(\mu)$*. Für alle* $t > 0$ *gilt* $T_t f \in C^\infty(M)$ *und die Abbildung*

$$u : (0, \infty) \times M \to \mathbb{R},\ (t, x) \mapsto T_t f(x)$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert $f \in L^p(\mu)$, *falls* $p < \infty$, *bzw.* $f \in L^\infty_*(\mu)$, *sonst.*

Beweis. Theorem über Lösungen zur Wärmeleitungsgleichung auf $L^p(\mu)$. Es sei $N := (0, \infty) \times M$ und $f \in L^p(\mu)$. Wir definieren die Distribution $u \in \mathcal{D}'(N)$ durch

$$(u, \varphi)_N := \int_0^\infty \int_M T_t f \varphi(t, \cdot) d\mu dt = \int_0^\infty (T_t f, \varphi(t, \cdot))_M dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(N).$$

Hier schreiben wir die Subskripte um zwischen Distributionen auf M und N zu unterscheiden. Aufgrund der Stetigkeit von $t \mapsto T_t f$ ist das wohldefiniert. Wir zeigen $u \in C^\infty(N)$ und $u(t, \cdot) = T_t f$ für alle $t : 0$ im Sinne von $L^p(\mu)$. Die Anfangswertaussage folgt dann direkt aus dem Satz über die L^p-Halbgruppen.

Wir behandeln nun zunächst den Fall $p = 2$. Für $\varphi \in D(N)$ gilt

$$\begin{aligned}
(\Delta_\mu u, \varphi)_N &= (u, \Delta_\mu \varphi)_N \\
&= \int_0^\infty (T_t f, \Delta_\mu \varphi(t, \cdot))_M dt \\
&= \int_0^\infty (\Delta_\mu T_t f, \varphi(t, \cdot))_M dt \\
(T_t f \text{ ist } L^2\text{-Lösung}) &= \int_0^\infty (\dot{T}_t f, \varphi(t, \cdot))_M dt \\
(\text{partielle Integration (!)}) &= -\int_0^\infty (T_t f, \dot{\varphi}(t, \cdot))_M dt \\
&= (u, -\partial_t \varphi) \\
&= (\partial_t u, \varphi).
\end{aligned}$$

Nun folgt $u \in C^\infty(N)$ aus der Hypoelliptizität des Wärmeoperators. Für alle $\psi \in \mathcal{D}((0, \infty))$ und $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ ist $\psi \otimes \varphi \in \mathcal{D}(N)$ und es gilt

$$\int_0^\infty \psi(t)(T_t f, \varphi)_M dt = (u, \psi \otimes \varphi)_N = \int_0^\infty \psi(t)(u(t, \cdot), \varphi) dt.$$

Da $t \mapsto (T_t f, \varphi)_M$ stetig ist, folgt für jedes $t > 0$, dass $(T_t f, \varphi)_M = (u(t, \cdot), \varphi)_M$. Da $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ beliebig war, erhalten wir $T_t f = u(t, \cdot)$ im Sinne von Distributionen auf M und damit $T_t f = u(t, \cdot)$ in $L^2(\mu)$, da beide Funktion in $L^1_{\text{loc}}(M)$ liegen.

Für allgemeine $1 \leq p \leq \infty$ kann man wie folgt vorgehen. Die Aussage $(\partial_t - \Delta_\mu) u = 0$ im Sinne von $\mathcal{D}'(N)$ folgt aus der Stetigkeit von $\partial_t - \Delta_\mu$ auf $\mathcal{D}'(N)$ und der Approximation von $T_t f$ durch $T_t g$ mit $g \in L^2(\mu)$. Nun liefert die Hypoelliptizität wieder $u \in C^\infty(M)$ und mit einem analogen Schluss zu oben folgt $u(t, \cdot) = T_t f$ in $L^p(\mu)$. Das beendet den Beweis. □

Zum Schluss dieses Abschnittes diskutieren wir noch kurz den Zusammenhang zu Brownscher Bewegung. Wir wählen von nun an stets die glatte Version von $T_t f$.

Lemma. *Für $t > 0$ und $x \in M$ existieren eindeutige*

$$p_{t,x} \in \bigcap_{1 \leq p \leq \infty} L^p(\mu)$$

mit

$$T_t f(x) = \int_M p_{t,x} f \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $f \in \cup_{1 \leq p \leq \infty} L^p(\mu)$.

Beweis. Sei $p \geq 1$ und $q \leq \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$. Die Punktauswertungen $x \mapsto T_t f(x)$ sind stetig (da positive Funktionale, Übung) und $(L^p(\mu))^* = L^q(\mu)$, falls $p < \infty$, sowie $(L^\infty_*(\mu))^* = L^1(\mu)$. Deshalb existieren $p_{t,x} \in L^q(\mu)$ mit

$$T_t f(x) = \int_M p_{t,x} f \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $f \in L^p(\mu)$. Da die Halbgruppen auf $L^2(\mu) \cap L^p(\mu)$ übereinstimmen, hängen die Funktionen $p_{t,x}$ nicht von p ab. □

Wärmekern in Übung

Im folgenden Theorem ist $M \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von M ausgestattet mit der Borel-σ-Algebra.

Theorem (Brownsche Bewegung)**.** *Für alle $x \in M$ ist die Abbildung $A \mapsto T_t 1_A(x)$ ein Subwahrscheinlichkeitsmaß auf der Borel-σ-Algebra von M. Es gibt einen eindeutigen Markoff-Prozess $(B_t)_{t>0}$ auf $M \cup \{\infty\}$ (d.h. $\mathbb{P}(B_{t+s} \in A \mid B_s = x) = \mathbb{P}(B_t \in A \mid B_0 = x)$ für alle $t, s > 0$, $x \in M \cup \{\infty\}$ und $A \subseteq M \cup \{\infty\}$ messbar) mit*

$$\mathbb{P}(B_t \in A \mid B_0 = x) = T_t 1_A(x),$$

für alle $x \in M, t > 0$ und jede Borelmenge $A \subseteq M$.

Beweis. Skizze. Es sei $M \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von M. In diesem Fall ist $O \subseteq M \cup \{\infty\}$ genau dann offen, wenn

$$O = O' \cup (M \cup \{\infty\} \setminus K),$$

wobei $O' \subseteq M$ offen und $K \subseteq M$ kompakt sind.

Auf der Borel-σ-Algebra von $M \cup \{\infty\}$ betrachten wir die Abildung $\mu_{x,t}$ gegeben durch

$$\mu_{x,t}(A) = \begin{cases} T_t 1_A(x) & \text{falls } \infty \notin A \\ T_t 1_{A \setminus \{\infty\}} + 1 - T_t 1 & \text{falls } \infty \in A \end{cases}.$$

Hier nutzen wir die Messbarkeit von $\{\infty\}$, welche aus der Existenz einer M überdeckenden Folge kompakter Mengen folgt. Wegen

$$\mu_{x,t}(A) = \int_A p_{t,x} \, \mathrm{d}\mu = T_t 1_A(x)$$

für messbare $A \subseteq M$ folgt leicht, dass $\mu_{x,t}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $M \cup \{\infty\}$ sind, welche messbar (sogar stetig) von t und x abhängen. Die Existenz eines Markoff-Prozesses mit den gewünschten Eigenschaften ist ein Standartresultat über stochastische Prozesse (auf separablen metrischen Räumen). Es nutzt die Gleichung

$$\mu_{x,t+s}(A) = \int_M \mu_{y,t}(A) d\mu_{x,s}(y),$$

welche aus der Halbgruppeneigenschaft von (T_t) folgt. $\square$

KAPITEL 3

Der Satz von Rademacher und wesentliche Selbstadjungiertheit

In diesem Kapitel lernen wir ein Kriterium kennen, welches sicher stellt, dass alle selbstadjungierten Erweiterungen von $\mathcal{L}$ übereinstimmen. Als technisches Hilfsmittel benötigen wir den Satz von Rademacher. Er charakterisiert Lipschitz-Funktionen durch die Beschränktheit des distributionellen Gradienten.

Es sei (M, g) eine Mannigfaltigkeit und ρ die zugehörige geodätische Metrik. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-Funktion* mit *Lipschitz-Konstante* K, falls

$$|f(x) - f(y)| \leq K\rho(x, y) \text{ für alle } x, y \in M.$$

Die Menge aller Lipschitz-Funktionen bezüglich ρ bezeichnen wir mit $\mathrm{Lip}(M)$. Die *Lipschitz-Halbnorm* (die kleinste Lipschitz-Konstante) einer Funktion $f \in \mathrm{Lip}(M)$ ist definiert durch

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := \sup_{x,y\in M,\, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x, y)}.$$

Zum Aufwärmen zeigen wir, dass glatte Funktionen mit beschränktem Gradient Lipschitz-Funktionen sind.

Proposition. *Es sei (M, g) eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M)$ mit $|\nabla f| \in C_b^\infty(M)$. Dann gilt $f \in \mathrm{Lip}(M)$ und*

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq \sup_M |\nabla f|.$$

Beweis. Es sei

$$C := \sup_M |\nabla f|.$$

Zu $x, y \in M$ wählen wir eine Kurve $\gamma : [a, b] \to M$, mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Nach dem HDI und der Definition von ∇ gilt

$$f(x) - f(y) = \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b df(\dot\gamma)\, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b \langle \nabla f, \dot\gamma\rangle\, \mathrm{d}\lambda,$$

weswegen

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_a^b |\nabla f||\dot\gamma|\, \mathrm{d}\lambda \leq C \int_a^b |\dot\gamma|\, \mathrm{d}\lambda = CL(\gamma).$$

Da $\rho(x,y)$ das Infimum über die Längen aller solcher Kurven ist, folgt die gewünschte Aussage. $\square$

Der Satz von Rademacher liefert eine Umkehrung von dieser Proposition für allgemeine Lipschitz-Funktionen. Dabei kann die Differenzierbarkeit nur im schwachen Sinne gewährleistet werden, da Lipschitz-Funktionen im Allgemeinen nicht differenzierbar sein müssen (betrachte z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$).

Theorem (Satz von Rademacher)**.** *Es sei (M, g, μ) eine gewichtete riemannsche n-Mannigfaltigkeit. Für alle $f \in \mathrm{Lip}(M)$ gilt $\nabla f \in \vec{L}^\infty(\mu)$ und*

$$\|\nabla f\|_\infty \le \|f\|_{\mathrm{Lip}}.$$

Bemerkung. Tatsächlich macht der Satz von Rademacher noch die stärkere Aussage, dass f in fast jedem Punkt differenzierbar ist (falls man punktweise Differenzierbarkeit geeignet über Karten definiert).

Für den Beweis des Satzes benötigen wir zwei Hilfsaussagen. Wie oben bezeichnen wir mit ∂_i die distributionellen partiellen Ableitungen im $\mathbb{R}^n$ und statten offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgue-Maß aus.

Lemma. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine K-Lipschitz-Funktion bezüglich der euklidischen Metrik. Für $i = 1, \ldots, n$ gilt $\partial_i f \in L^\infty(\Omega)$ und*

$$\sum_{i=1}^n (\partial_i f)^2 \le K^2 \ \lambda\text{-fast überall.}$$

Beweis. Es sei $e \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor, d.h. $|e| = 1$. Mit ∂_e bezeichnen wir die Richtungsableitung in Richtung e. Ihre distributionelle Variante ist definiert durch $(\partial_e f, \psi) := -(f, \partial_e \psi)$, $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$, und es gilt $\langle \bar{\nabla} f, e\rangle = \partial_e f$ im Sinne von Distributionen, wobei $\bar{\nabla}$ der übliche Gradient in $\mathbb{R}^n$ ist.

Für $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ berechnen wir mithilfe der üblichen Integralsätze

$$\begin{aligned}
(f, \partial_e \psi) &= \int_\Omega f \partial_e \psi \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_\Omega f(x) \lim_{h\to 0} h^{-1}(\psi(x+he) - \psi(x)) \,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \lim_{h\to 0} h^{-1} \int_\Omega f(x)(\psi(x+he) - \psi(x)) \,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \lim_{h\to 0} h^{-1} \int_\Omega (f(x-he) - f(x))\psi(x) \,\mathrm{d}\lambda(x).
\end{aligned}$$

Aus der K-Lipschitz-Stetigkeit von f folgt

$$|(\partial_e f, \psi)| = |(f, \partial_e \psi)| \le K\|\psi\|_1,$$

weswegen sich $(\partial_e f, \cdot)$ zu einem stetigen Funktional auf $L^1(\Omega)$ fortsetzen lässt. Der Dualraum von $L^1(\Omega)$ ist isometrisch isomorph zu $L^\infty(\Omega)$ und der Isomorphismus ist gegeben durch $L^\infty(\Omega) \to L^1(\Omega)'$, $h \mapsto L_h$, mit

$$L_h(\psi) = \int_\Omega h\psi \, \mathrm{d}\lambda.$$

Deshalb existiert $h \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$(\partial_e f, \psi) = \int_\Omega h\psi \, \mathrm{d}\lambda \text{ für alle } \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Dies bedeutet aber gerade $\partial_e f = h$ im Sinne von Distributionen und $|\partial_e f| \leq K$ fast überall. Da e beliebig war erhalten wir die gewünschte Abschätzung. □

Lemma. *Es sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \in M$ existiert eine Karte (U, φ) mit lokalen Koordinaten (x^i), sodass $p \in U$ und*

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Beweis. Übung. □

Beweis. Satz von Rademacher. Aus dem vorigen Lemma und der Stetigkeit der Metrik folgt, dass es zu jedem $p \in M$ und $D > 1$ eine Karte (U, φ) mit lokalen Koordinatenfunktionen (x^i) und $p \in U$ gibt, sodass für alle $x \in U$, $\xi \in T_xM$ und $\eta \in T_xM^*$ gilt

$$g_{ij}(x)\xi^i\xi^j \leq D^2((\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^n)^2)$$

und

$$g^{ij}(x)\eta_i\eta_j \leq D^2((\eta_1)^2 + \ldots + (\eta_n))^2.$$

Durch weiteres verkleinern von U können wir erreichen, dass $\varphi(U)$ eine Kugel mit Mittelpunkt $\varphi(p)$ ist. Insbesondere gehört für alle $x, y \in U$ die gerade zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ zu U, weswegen

$$\rho(x, y) \leq D|\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

(Vergleiche den Beweis der Äquivalenz der Topologien von M und der von ρ erzeugten Topologie).

$\longleftrightarrow$ Zeichnung

Sei nun $f : M \to \mathbb{R}$ eine Lipschitz-Funktion mit Lipschitz-Konstante K, $D > 1$ und (U, φ) eine Karte wie oben. Wir setzen $\bar{f} := f \circ \varphi^{-1}$. Für $\bar{x}, \bar{y} \in \varphi(U)$ gilt

$$|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})| \leq K\rho(\varphi^{-1}(\bar{x}), \varphi^{-1}(\bar{y})) \leq DK|\bar{x} - \bar{y}|,$$

also ist $\bar{f}$ eine DK-Lipschitz-Funktion auf $\varphi(U)$. Aus dem Lemma über Lipschitz-Funktionen im $\mathbb{R}^n$ folgt nun $\partial_i \bar{f} \in L^\infty(\varphi(U))$ und

$$\sum_{i=1}^n (\partial_i \bar{f})^2 \leq D^2 K^2 \ \lambda\text{-fast überall auf } \varphi(U).$$

Die Identität $(\partial_i \bar{f}) \circ \varphi = \frac{\partial}{\partial x^i} f$ (s.o.) impliziert

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f \right)^2 \leq D^2 K^2 \ \mu\text{-fast überall auf } U.$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial x^i} f \in L^2_{\mathrm{loc}}(U)$ für alle i erhalten wir $\nabla f \in \vec{L}^2_{\mathrm{loc}}(U)$ und

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} (s.o).$$

Daraus und aus der Wahl der Karte folgt

$$|\nabla f|^2 = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} \leq D^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f \right)^2 \leq D^2 D^2 K^2$$

μ-fast überall auf U. Da M von abzählbar vielen solchen Karten überdeckt wird, erhalten wir schließlich

$$\|\nabla f\|_\infty \leq D^2 K.$$

Weil $D > 1$ beliebig war, folgt die gewünschte Aussage. □

Eine für uns sehr wichtige Folgerung aus dem Satz von Rademacher ist die folgende Aussage über Lipschitz-Funktionen mit kompaktem Träger, deren Gesamtheit wir mit $\mathrm{Lip}_c(M)$ bezeichnen.

Proposition. *Es sei (M, g, μ) eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gilt*

$$C_c^\infty(M) \subseteq \mathrm{Lip}_c(M) \subseteq W_0^1(M, \mu).$$

Beweis. Es sei $f \in \mathrm{Lip}_c(M)$. Da f kompakten Träger hat und stetig ist, gilt $f \in L^2(\mu)$. Als Distribution hat ∇f auch kompakten Träger und der Satz von Rademacher zeigt $|\nabla f| \in L^\infty(\mu)$. Wir erhalten $|\nabla f| \in L^2(\mu)$, also $f \in W^1(M, \mu)$. Wir haben oben gezeigt, dass W^1-Funktionen mit kompaktem Träger zu W_0^1 gehören. Glatte Funktionen mit kompaktem Träger haben beschränkte Gradienten und sind deshalb Lipschitz-Stetig (s.o.). □

Der Satz von Rademacher und seine Folgerungen erlauben es uns nun eine ganze Fülle von globalen Sätzen über Lösungen zur Laplace - Gleichung und zur Wärmeleitungsgleichung zu beweisen.

Theorem (L^2-Liouville-Theorem). *Es sei (M, g, μ) eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit und $\lambda \geq 0$. Alle $u \in L^2(\mu)$ mit*

$$\Delta_\mu u = \lambda u$$

sind konstant. Falls $\lambda > 0$, gilt sogar $u = 0$.

Beweis. Sei $\lambda \geq 0$ und $u \in L^2(\mu)$ mit $\Delta_\mu u = \lambda u$. Aus der lokalen Regularitätstheorie folgt $u \in C^\infty(M)$. Wir zeigen zunächst, dass für alle $f \in \mathrm{Lip}_c(M)$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\int_M |\nabla u|^2 f^2 \,\mathrm{d}\mu \leq 4 \int_M |\nabla f|^2 u^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Sei dazu $f \in \mathrm{Lip}_c(M)$ und Ω eine relativkompakte Umgebung von $\mathrm{supp}(f)$. Es gilt $uf^2 \in \mathrm{Lip}_c(M)$ (Übung). Da Einschränkungen von Lipschitz-Funktionen auch Lipschitz-Funktionen sind, folgt $uf^2|_\Omega \in \mathrm{Lip}_c(\Omega)$ und somit $uf^2|_\Omega \in W_0^1(\Omega, \mu)$. Deswegen existiert eine Folge $\psi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\psi_n \to uf^2|_\Omega$ in $W^1(\Omega, \mu)$. Da u glatt ist, gilt $\nabla u \in \vec{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Insbesondere ist $\nabla u|_\Omega \in \vec{L}^2(\Omega, \mu)$. Die (distributionelle) Definition von Δ_μ und die Produktregel für ∇ zeigt

$$\begin{aligned}
0 &\geq -\lambda \int_M u^2 f^2 \,\mathrm{d}\mu = -\int_M uf^2 \Delta_\mu u \,\mathrm{d}\mu = -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi_n \Delta_\mu u \,\mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \langle \nabla \psi_n, \nabla u \rangle \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \langle \nabla(uf^2), \nabla u \rangle \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_M |\nabla u|^2 f^2 \,\mathrm{d}\mu + 2 \int_M \langle \nabla f, \nabla u \rangle uf \,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung, der elementaren Ungleichung $2ab \leq a^2/2 + 2b^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla u|^2 f^2 \,\mathrm{d}\mu &\leq -2 \int_\Omega \langle \nabla f, \nabla u \rangle uf \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \frac{1}{2} \int_M |\nabla u|^2 f^2 \,\mathrm{d}\mu + 2 \int_M |\nabla f|^2 u^2 \,\mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

weswegen

$$\int_M |\nabla u|^2 f^2 \,\mathrm{d}\mu \leq 4 \int_M |\nabla f|^2 u^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Sei nun $R > 0$, $o \in M$ und $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x) = (R - \rho(x, o))_+$. Diese Funktion hat Lipschitz-Konstante 1 und ihr Träger ist in der abgeschlossenen Kugel $B_R^\rho(o)$ enthalten. Da (M, ρ) vollständig ist, ist $B_R^\rho(o)$ nach dem Satz von Hopf-Rinow kompakt. Wir können also die Ungleichung von oben auf f anwenden. Für $R > r > 0$ gilt $f \geq R - r$ auf $B_r^\rho(o)$. Weiterhin zeigt der Satz von Rademacher, dass $|\nabla f|^2 \leq 1$. Diese beiden Beobachtungen liefern zusammen mit der bereits bewiesenen

Ungleichung, dass

$$\int_{B_r^\rho(o)} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{4}{(R-r)^2} \int_M u^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Da $u \in L^2(\mu)$ können wir erst den Grenzwert $R \to \infty$ und dann den Grenzwert $r \to \infty$ bilden, und erhalten

$$\int_M |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

was $\nabla u = 0$ zeigt. Deshalb ist u 0-Lipschitz und somit konstant. Für $\lambda > 0$ ist $u = 0$ die einzige konstante Funktion, die die Gleichung $\Delta_\mu u = \lambda u$ löst. $\square$

Bemerkung.

- Der klassische Satz von Liouville sagt, dass eine beschränkte holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konstant ist. Da eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann holomorph ist, wenn sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial y} = -\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial x}$$

erfüllt, ist der Realteil einer holomorphen Funktion harmonisch (Übung), das heißt

$$\Delta \mathrm{Re} f = \frac{\partial^2 \mathrm{Re} f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{Re} f}{\partial y^2} = 0.$$

Ist umgekehrt eine harmonische Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gegeben, so ist sie der Realteil einer holomorphen Funktion. In diesem Sinne macht der Satz von Liouville Aussagen über beschränkte harmonische Funktionen auf $\mathbb{R}^2$.

Tatsächlich kann man jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eindeutig zu einer meromorphen Funktion

$$\hat{f} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

fortsetzen. Dabei ist die Einpunktkompaktifizierung $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine kompakte Mannigfaltigkeit, die von $\mathbb{C}$ in natürlicher Weise eine riemannsche Metrik erbt (!). Ist f beschränkt, so folgt aus der Laurent-Entwicklung um ∞, dass $\hat{f}(\infty) \in \mathbb{C}$, also $\hat{f}$ holomorph ist (dieses Resultat heißt auch Riemannscher Hebbarkeitssatz). Weiterhin kann man nachrechnen, dass in diesem Fall $\mathrm{Re}\hat{f}$ auch harmonisch ist (bezüglich des Laplace-Operators auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$). Da kompakte Mannigfaltigkeiten vollständig sind und beschränkte Funktionen auf kompakten riemannsche Mannigfaltigkeiten zu $L^2(\mathrm{vol})$ gehören, folgt aus unserem Satz, dass $\mathrm{Re} f$ konstant ist. Wegen der Cauchy - Riemannschen Differentialgleichungen muss dann auch $\mathrm{Im} f$ konstant sein. In diesem Sinne ist unser L^2-Liouville-Theorem eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Liouville.

- Die Forderung des Zusammenhangs der Mannigfaltigkeit ist notwendig. Funktionen, die konstant auf Zusammenhangskomponenten sind, erfüllen nämlich stets die Voraussetzungen des vorigen Theorems. Man kann aber alle Betrachtungen auch auf Zusammenhangskomponenten durchführen.
- Ist (M, g, μ) eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit und $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ mit $\Delta_\mu u = 0$, so ist u bereits dann konstant, falls
$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{\|u 1_{B_r^\rho(o)}\|_p^p} dr = \infty,$$
für ein $1 < p < \infty$, $o \in M$ und $r_0 > 0$. Dieses Resultat ist als Theorem von Karp'82 bekannt. Insbesondere gilt, dass jede harmonische L^p-Funktion konstant ist (L^p-Liouville-Theorem von Yau '76).

Theorem (Gaffney '51)**.** *Sei (M, g, μ) eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist der Operator $\mathcal{L} = (-\Delta_\mu)|_{C_c^\infty(M)}$ wesentlich selbstadjungiert (hat genau eine selbstadjungierte Fortsetzung, nämlich L). Insbesondere gilt $\mathcal{L}^* = L$, das heißt*
$$D(L) = D(\mathcal{L}^*) = \{f \in L^2(\mu) \mid \Delta_\mu f \in L^2(\mu)\}$$
und
$$Lf = -\Delta_\mu f.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst $L = \mathcal{L}^*$. Die Inklusion $L \subseteq \mathcal{L}^*$ wurde oben schon bewiesen, weswegen es genügt $D(\mathcal{L}^*) \subseteq D(L)$ zu zeigen. Sei dazu $f \in D(\mathcal{L}^*)$, d.h. $f \in L^2(\mu)$ mit $\Delta_\mu f \in L^2(\mu)$, gegeben. Wir setzen
$$g := (L+1)^{-1}(-\Delta_\mu + 1)f.$$
Da L die Einschränkung von $-\Delta_\mu$ auf $D(L)$ ist, und $g \in D(L)$, folgt
$$(-\Delta_\mu + 1)g = (L+1)g = (-\Delta_\mu + 1)f,$$
also
$$\Delta_\mu(g - f) = g - f.$$
Nach dem L^2-Liouville-Theorem erhalten wir $f = g \in D(L)$.

Sei $\widetilde{L}$ eine beliebige selbstadjungierte Erweiterung von $\mathcal{L}$. Es gilt $\widetilde{L} \subseteq \mathcal{L}^*$ und nach dem oben gezeigten $\widetilde{L} \subseteq \mathcal{L}^* = L$. Damit gilt aber auch
$$L = L^* \subseteq (\widetilde{L})^* = \widetilde{L},$$

und somit $L = \widetilde{L}$. □

Bemerkung.
- Der Beweis des vorigen Satzes verwendet keinerlei Geometrie sondern gilt sehr allgemein. Sei A ein symmetrischer nichtnegativer dicht-definierter Operator A auf einem Hilbert-Raum. Gibt es ein $\lambda > 0$, sodass $\ker(A^* + \lambda) = \{0\}$, so ist A wesentlich selbstadjungiert und die eindeutige selbstadjungierte Fortsetzung ist gegeben durch A^*.
- Der Satz gilt für $\mathbb{R}^n$, kompakte Mannigfaltigkeiten und Modellmannigfaltigkeiten mit unendlichem Radius.
- Der Satz ist nur ein hinreichendes Kriterium für wesentliche Selbstadjungiertheit. Auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist Δ genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn $n \geq 4$.

KAPITEL 4

Stochastische Vollständigkeit

In diesem Kapitel geht es um stochastische Vollständigkeit. Wir lernen ein geometrisches Kriterium kennen, welches stochastische Vollständigkeit garantiert und diskutieren einige Beispiele.

Definition (Stochastische Vollständigkeit)**.** Eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g, μ) heißt *stochastisch vollständig*, falls $T_t 1 = 1$ für alle $t > 0$.

Bemerkung. Es sei (B_t) die Brownsche Bewegung auf $M \cup \{\infty\}$, d.h. der Markoff-Prozess mit

$$P(B_t \in A \mid B_0 = x) = T_t 1_A(x).$$

Die Mannigfaltigkeit ist genau dann stochastisch vollständig, wenn

$$P(B_t \in M \mid B_0 = x) = 1 \text{ für alle } x \in M,\ t > 0,$$

das heißt, wenn (B_t) die Mannigfaltigkeit zu keiner Zeit verlässt.

Die folgende Proposition charakterisiert stochastische Vollständigkeit. Aus Zeitgründen verzichten wir auf einen vollständigen Beweis und zeigen nur den für uns relevanten Teil.

Proposition (Charakterisierung stochastische Vollständigkeit)**.** *Es sei (M, g, μ) eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) *(M, g, μ) ist stochastisch vollständig.*

(ii) *Für alle $\alpha > 0$ gilt $\alpha G_\alpha 1 = 1$.*

(iii) *Die Wärmeleitungsgleichung zum Anfangswert 0 hat eine eindeutige beschränkte Lösung, d.h. für $u \in C_b^\infty((0, \infty) \times M)$ mit $\Delta_\mu u = \partial_t u$ und $u(t, \cdot) \to 0$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$ für $t \to 0+$ gilt $u \equiv 0$.*

(iv) *Für alle $\alpha > 0$ und $u \in C_b^\infty(M)$ mit $\Delta_\mu u = \alpha u$ gilt $u \equiv 0$.*

Beweis. (iii) $\Rightarrow$ (i): Im Kapitel über die lokale Regularitätstheorie haben wir gesehen, dass es eine glatte Version u von $(t, x) \mapsto T_t 1(x)$ gibt, die die Wärmeleitungsgleichung zum Anfangswert 1 löst. Da auch die Konstante Funktion die Wärmeleitungsgleichung zum Anfangswert 1 löst, folgt aus (iii), dass $T_t 1 = 1$. □

Im folgenden Theorem bezeichnen schreiben wir $\log^\sharp = \max\{\log, 1\}$.

Theorem (Grigor'yan '86)**.** *Es sei (M, g, μ) eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Gilt*

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{r}{\log^\sharp \mu(B_r^\rho(o))} \,\mathrm{d}r = \infty$$

für ein $r_0 > 0$ und $o \in M$, so ist (M, g, μ) stochastisch vollständig.

Bemerkung.

- Die Größen $r_0 > 0$ und $o \in M$ spielen im vorigen Theorem keine herausragende Rolle. Da die Mannigfaltigkeit zusammenhängend ist, impliziert

  $$\int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{\log^\sharp \mu(B_r^\rho(o))} \,\mathrm{d}r = \infty$$

  für ein $r_0 > 0$ und $o \in M$, dass

  $$\int_{s}^{\infty} \frac{1}{\log^\sharp \mu(B_r^\rho(x))} \,\mathrm{d}r = \infty$$

  für alle $s > 0$ und $x \in M$. Deshalb schreibt man in der Literatur für diese Bedingung einfach kurz

  $$\int^{\infty} \frac{r}{\log^\sharp \mu(B_r^\rho)} \,\mathrm{d}r = \infty,$$

  ohne Hinweis auf die genauen Integrationsgrenzen und den Referenzpunkt.

- Die Voraussetzung des Theorems sind erfüllt, falls es eine Folge (r_k) mit $\lim_{k\to\infty} r_k = \infty$ und eine Konstante $C > 0$ gibt, sodass

  $$\mu(B_{r_k}^\rho(o)) \leq \exp(C r_k^2 \log r_k) \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

  Dies ist insbesondere der Fall für $\mathbb{R}^n$ und kompakte Mannigfaltigkeiten.

- Das Volumenwachstum von Modellmannigfaltigkeiten kann beliebig groß werden. Ist nämlich (M, g) ein riemannsches Modell, sodass $M \setminus \{o\}$ isometrisch zu $(0, \infty) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1}$ ist, so ist (M, ρ) vollständig und es gilt

  $$\mathrm{vol}_g(B_r^\rho(o)) = \omega_n \int_0^r \psi^{n-1}(r) \,\mathrm{d}r.$$

  Tatsächlich gibt es eine stochastisch unvollständige Modellmannigfaltigkeit mit

  $$\int_{r_0}^{\infty} \frac{r}{\log^\sharp \mu(B_r^\rho(o))} \,\mathrm{d}r < \infty.$$

  In diesem Sinne ist das vorige Theorem optimal, obwohl es im Allgemeinen nur hinreichend ist.

Wir werden das Theorem von Grigor'yan aus dem folgenden Satz herleiten, welcher auch von Grigor'yan stammt.

Theorem (Eindeutigkeitsklasse zur Wärmeleitungsgleichung)**.** *Es sei (M, g, μ) eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit, $T > 0$ und $u \in C^\infty((0,T) \times M)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $u(t,\cdot) \to 0+$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Existiert ein $o \in M$ und eine monoton wachsende Funktion $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit*

$$\int^\infty \frac{r}{f(r)} \,\mathrm{d}r = \infty,$$

sodass für alle $R > 0$ gilt

$$\int_0^T \int_{B^\rho_R(o)} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t \le \exp(f(R)),$$

so folgt $u \equiv 0$.

Bemerkung. Das Theorem ist so zu lesen: Zwei Lösungen der Wärmeleitungsgleichung zu einem gegebenen Anfangswert f (im Sinne von $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$!), deren Differenz nicht zu schnell wächst (in einem sehr präzisen Sinn), müssen übereinstimmen.

Bevor wir den Satz beweisen, diskutieren wir noch zwei Folgerungen und zeigen, dass die Resultate scharf sind.

Beweis. Grigor'yans Volumenwachstumskriterium für stochastische Vollständigkeit: Es genügt zu zeigen, dass jede beschränkte Lösung der Wärmeleitungsgleichung zum Anfangswert 0 verschwindet (s.o.). Sei also $u \in C^\infty_b((0,\infty) \times M)$ eine Lösung zur Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswert 0. Da u gleichmäßig beschränkt ist und $\lim_{t\to 0+} u(t,\cdot) \to 0$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$, folgt mit dem Satz von Lebesgue $\lim_{t\to 0+} u(t,\cdot) \to 0$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$. Wir setzen

$$S := \sup_{t>0,\, x\in M} |u(t,x)|$$

und

$$f(r) := \log^\sharp(S^2 T \mu(B^\rho_r(o))).$$

Nach unserer Voraussetzung gilt

$$\int^\infty \frac{r}{f(r)} \,\mathrm{d}r = \infty,$$

und die Wahl von f und S impliziert

$$\int_0^T \int_{B^\rho_R(o)} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t \le S^2 T \mu(B^\rho_r(o)) \le \exp(f(R)).$$

Daher folgt die gewünschte Aussage aus dem Resultat zur Eindeutigkeitsklasse der Wärmeleitungsgleichung. □

Theorem (Tychonoff '35, Täcklind '36)**.** *Es sei* $T > 0$ *und es sei* $u \in C^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^n)$ *eine Lösung zur Wärmeleitungsgleichung mit* $u(t,\cdot) \overset{t\to 0+}{\longrightarrow} 0$ *in* $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$*. Existiert eine Konstante* $C > 0$*, sodass für alle* $0 < t < T$ *und* $x \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$|u(t,x)| \le C \exp(C|x|^2),$$

so folgt $u \equiv 0$ *(Tychonoff). Die gleiche Aussage gilt, falls es eine monoton wachsende konvexe Funktion* $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *gibt, sodass*

$$\int^\infty \frac{r}{f(r)}\,\mathrm{d}r = \infty$$

und

$$|u(t,x)| \le \exp f(|x|),$$

für alle $0 < t < T$ *und* $x \in \mathbb{R}^n$ *(Täcklind).*

Beweis. Es genügt die Aussage für konvexe Funktionen zu zeigen. Da im $\mathbb{R}^n$ gilt $\lambda(B_R(0)) = CR^n$, folgt aus der Annahme

$$\int_0^T \int_{B_R(0)} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}t \le CR^n \exp(2f(R)) = \exp(\tilde{f}(R)),$$

wobei $\tilde{f}(R) = 2f(R) + n\log r + \log C$. Die Konvexität von f impliziert $n\log R + \log C \le f(R)$ für große R (falls f nicht konstant). Damit folgt die Aussage aus dem Resultat zur Eindeutigkeitsklasse der Wärmeleitungsgleichung. □

Tychonoffs und Täcklinds Bedingung für die Eindeutigkeit von Lösungen zur Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n$ sind scharf. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine von null verschiedene Lösung zur Wärmeleitungsgleichung u mit Anfangswert 0 (in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, welche

$$|u(t,x)| \le C \exp(C|x|^{2+\varepsilon})$$

für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Wir konstruieren nun eine solche Funktion.

Für $\alpha > 1$ definieren wir $h_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h_\alpha(t) = \begin{cases} \exp(-t^{-\alpha}) & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}.$$

Aus der Analysis I Vorlesung ist bekannt, dass h_α eine glatte Funktion ist, mit $h_\alpha^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (insbesondere wird sie nicht durch ihre Taylor-Reihe um 0 dargestellt). Die folgenden Abschätzungen für die Ableitungen sind weniger offensichtlich.

Lemma. *Es existiert eine Konstante* $0 < \theta = \theta(\alpha) < 1$*, sodass*

$$|h_\alpha^{(n)}(t)| \le \frac{n!}{(\theta t)^n} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right) \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N},\ t > 0.$$

Beweis. Sei $t > 0$ beliebig und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(s) = t + \delta \exp(is)$. Da h holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z > 0\}$ ist, folgt aus den Cauchy-Formeln für Ableitungen, dass

$$h_\alpha^{(n)}(t) = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{h_\alpha(\gamma(s))\dot{\gamma}(s)}{(\gamma(s) - t)^{n+1}} \,\mathrm{d}s.$$

Für $z = |z| \exp(i\varphi)$ mit $\varphi \in [-\pi, \pi)$ gilt nach Definition und den üblichen Rechenregeln im komplexen

$$\mathrm{Re} z^{-\alpha} = |z|^{-\alpha} \cos(-\alpha\varphi).$$

Beachte: Es gilt $z^{-\alpha} = \exp(-\alpha \log z)$, mit dem Hauptzweig $\log z = \log |z| + i\varphi$.

Setzen wir $\delta = \theta t$, so gilt für alle $z = t + \delta \exp(is)$ auf der Kurve γ, dass

$$|z| \leq |t| + |\delta \exp(is)| = |t| + |\delta| = t(1 + \theta)$$

und

$$|\varphi| \leq \arccos \frac{t}{\sqrt{t^2 + \delta^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}}.$$

Aus diesen Rechnungen folgt, dass wir $\theta > 0$ abhängig von α aber unabhängig von t so klein wählen können, sodass für alle z auf γ gilt

Zeichnung

$$\mathrm{Re} z^{-\alpha} = |z|^{-\alpha} \cos(-\alpha\varphi) \geq \frac{1}{2} t^{-\alpha}.$$

Die Formel für die Ableitungen von oben liefert nun

$$|h_\alpha^{(n)}(t)| \leq \frac{n!}{\delta^n} \exp\left(-\frac{1}{2} t^{-\alpha}\right) = \frac{n!}{(\theta t)^n} \exp\left(-\frac{1}{2} t^{-\alpha}\right).$$

□

Für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$u_\alpha(t, x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} h_\alpha^{(n)}(t).$$

Offensichtlich konvergiert die Reihe für $t \leq 0$. Die Konvergenz für $t > 0$ und weitere Eigenschaften folgen aus der eben bewiesenen Abschätzung.

Lemma. *Die Funktion u_α ist eine Lösung zur Wärmeleitungsgleichung und erfüllt $\lim_{t \to 0+} u(t, \cdot) = 0$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$ gilt*

$$|u_\alpha(t, x)| \leq \exp\left(\frac{1}{t}\left(\frac{|x|^2}{\theta} - \frac{1}{2} t^{1-\alpha}\right)\right),$$

wobei θ eine Konstante wie aus dem vorigen Lemma ist.

Beweis. Formales Differenzieren der Summanden und eine Indexverschiebung zeigt, dass u_α die Wärmeleitungsgleichung löst, falls wir Summation und Differentiation vertauschen dürfen.

Da $\frac{n!}{(2n)!} \leq \frac{1}{n!}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} h_\alpha^{(n)}(t)\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{2n}}{n!(\theta t)^n} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{1}{t}\left(\frac{x^2}{\theta} - \frac{1}{2}t^{1-\alpha}\right)\right).\end{aligned}$$

Nach dem Majorantenkriterium für Reihen konvergiert die Reihe für u_α lokal gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$ und gleichmäßig in $t \in \mathbb{R}$. Weiterhin folgt aus dieser Ungleichung $u(t,x) \to 0$ lokal gleichmäßig in x für $t \to 0+$ und damit insbesondere in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Für festes t ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} h_\alpha^{(n)}(t)$$

eine Potenzreihe in x mit unendlichem Konvergenzradius. Daher gilt

$$\frac{d^2}{dx^2} u_\alpha(t,x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} h_\alpha^{(n)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} h_\alpha^{(n+1)}(t).$$

Nach unseren Abschätzungen für $h^{(n)}$ konvergiert die Reihe auf der rechten Seite gleichmäßig in t. Ist (f_n) eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $f_n \to f$ gleichmäßig und g eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ mit $f_n' \to g$ gleichmäßig, so ist f differenzierbar und es gilt $f' = g$ (Übung). Aus dieser Beobachtung und den bereits bewiesenen Eigenschaften folgt nun leicht, dass auch

$$\frac{d}{dt} u_\alpha(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} h_\alpha^{(n+1)}(t)$$

gilt. □

Eine Konsequenz dieses Lemmas ist, dass die Wärmeleitungsgleichung auch auf vollständigen Mannigfaltigkeit nicht eindeutig lösbar ist und dass die Abschätzung im Kriterium von Tychonoff gleichmäßig in t sein muss. Für jedes $t > 0$ existiert nämlich eine Konstante $C(t) > 0$, sodass

$$|u_\alpha(t,x)| \leq C(t) \exp(C(t)|x|^2) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Trotzdem gilt das folgende Lemma, welches zeigt, dass die Bedingung im Eindeutigkeitsresultat von Tychonoff scharf ist.

Lemma. *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Lösung zur Wärmeleitungsgleichung u mit Anfangswert 0 (in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$), welche nicht verschwindet und für die eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass*

$$|u(t,x)| \leq C \exp\left(C|x|^{2+\varepsilon}\right) \textit{ für alle } x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir zeigen, dass u_α mit genügend großem $\alpha > 1$ diese Bedingung erfüllt. Aufgrund des vorherigen Lemmas genügt es zu zeigen, dass es $\alpha > 1$ gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ gilt

$$\frac{1}{t}\left(\frac{|x|^2}{\theta} - \frac{1}{2}t^{1-\alpha}\right) \leq C|x|^{2+\varepsilon}.$$

Dies zu verifizieren ist jedoch eine leichte Extremwertaufgabe. □

Wir beweisen nun den Satz über die Eindeutigkeitsklasse der Wärmeleitungsgleichung in zwei Schritten. Zunächst benötigen wir eine Abschätzung für gewisse Lösungen zur Wärmeleitungsgleichung.

Lemma (A priori Abschätzung)**.** *Es sei (M, g, μ) eine vollständige zusammenhängende gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Ferner sei $0 \leq a < b$ und $u \in C^\infty((a, b) \times M)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, für die die Grenzwerte*

$$u(a, \cdot) := \lim_{t \to a+} u(t, \cdot) \text{ und } u(b, \cdot) := \lim_{t \to b-} u(t, \cdot)$$

in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ existieren. Ist $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion und $o \in M$, sodass

$$\int_a^b \int_{B_R(o)} |u(t, x)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(t) \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \exp(f(R)) \text{ für alle } R > 0,$$

so gilt

$$\int_{B_R(o)} |u(b, x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{B_{4R}(o)} |u(a, x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) + \frac{4}{R^2}, \qquad (\heartsuit)$$

falls

$$b - a \leq \frac{R^2}{8f(4R)}. \qquad (\Diamond)$$

Bemerkung.

- Ist $u \in C^\infty((0, T) \times M)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $u(t, \cdot) \overset{t \to 0+}{\longrightarrow} 0 \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$ in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mu)$, so kann das vorige Lemma für alle $0 \leq a < b < T$ angewendet werden.
- Das Lemma sagt Folgendes: Man kann die Werte einer Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf einer Kugel zu einem späteren Zeitpunkt durch die Werte der Lösung zu einem früheren Zeitpunkt auf einer größeren Kugel bis auf einen kleinen Fehler kontrollieren. Wie groß dabei der Zeitunterschied höchstens sein darf, hängt von der Lösung und der Größe der Kugel ab.

Beweis. Wegen der Stetigkeitsvoraussetzungen an u und da abgeschlossene Kugeln in M kompakt sind, können wir annehmen, dass u in einer Umgebung von $[a, b] \times M$ glatt ist. Für eine 1-Lipschitz-Funktion

$\rho : M \to \mathbb{R}$ und $s \notin [a, b]$ definieren wir die Funktion $\xi : [a, b] \times M \to \mathbb{R}$ durch

$$\xi(t, x) := \frac{\rho(x)^2}{4(t-s)}.$$

Wir werden ρ und s später genauer wählen. Der Satz von Rademacher und die Kettenregel (! hier muss nochmal lokalisiert werden, wir haben sie nur auf $W^1(M, \mu)$ bewiesen) liefern

$$|\nabla_g \xi(t, \cdot)| \leq \frac{|\rho|}{2|t-s|}.$$

Ferner gilt

$$\partial_t \xi(t, x) = -\frac{\rho^2(x)}{4(t-s)^2},$$

weswegen

$$\partial_t \xi + |\nabla_g \xi|^2 \leq 0.$$

Zu gegebenen $R > 0$ definieren wir die Funktion $\varphi : M \to \mathbb{R}$ durch

Zeichnung

$$\varphi(x) := (3 - \rho(x, o)/R)_+ \wedge 1.$$

Die Funktion φ hat die folgenden Eigenschaften:

- $0 \leq \varphi \leq 1$ auf M,
- $\varphi \equiv 1$ auf $B_{2R}(o)$,
- $\varphi \equiv 0$ auf $M \setminus B_{3R}(o)$,
- φ ist $1/R$-Lipschitz.

Da M vollständig ist, gilt $\varphi \in \mathrm{Lip}_c(M) \subseteq W_0^1(M, \mu)$. Für festes t ist die Funktion $u\varphi^2 e^\xi$ als Produkt und Hintereinanderausführung von lokalen Lipschitz-Funktionen eine lokale Lipschitz Funktion. Da φ kompakten Träger hat, gilt $u\varphi^2 e^\xi \in \mathrm{Lip}_c(M)$.

Multiplizieren wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u = \Delta_\mu u$$

mit $u\varphi^2 e^\xi$ und integrieren wir das Ergebnis über $[a, b] \times M$, so erhalten wir

$$\int_a^b \int_M (\partial_t u) u \varphi^2 e^\xi \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}t = \int_a^b \int_M (\Delta_\mu u) u \varphi^2 e^\xi \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}t.$$

Da u und ξ in einer Umgebung von $[a, b]$ glatt sind, gilt für das Zeit-Integral der linken Seite dieser Gleichung

$$\begin{aligned}\int_a^b (\partial_t u) u \varphi^2 e^\xi \, \mathrm{d}t &= \frac{1}{2} \int_a^b \partial_t (u^2) \varphi^2 e^\xi \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \, u^2 \varphi^2 e^\xi \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b (\partial_t \xi) \varphi^2 u^2 e^\xi \, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Um das Raumintegral auszuwerten verwenden wir die Greensche Formel (! für die W^1_{loc}-Funktion u und die W^1_0-Funktion mit kompakten Träger $u\varphi^2 e^\xi$, approximiere $u\varphi^2 e^\xi$ durch geeignete glatte Funktionen mit kompaktem Träger) und erhalten

$$\int_M (\Delta_\mu u) u\varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu = -\int_M \langle \nabla u, \nabla(u\varphi^2 e^\xi)\rangle \,\mathrm{d}\mu.$$

Die Kettenregel und die Produktregel (!) zeigen

$$\begin{aligned}
-\langle \nabla u, \nabla(u\varphi^2 e^\xi)\rangle &= -|\nabla u|^2\varphi^2 e^\xi - \langle \nabla u, \nabla \xi\rangle u\varphi^2 e^\xi \\
&\quad - 2\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle u\varphi e^\xi \\
&\leq -|\nabla u|^2\varphi^2 e^\xi + |\nabla u||\nabla\xi||u|\varphi^2 e^\xi \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2\varphi^2 + 2|\nabla\varphi|^2 u^2\right) e^\xi \\
&= \left(-\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + |\nabla u||\nabla\xi||u|\right)\varphi^2 e^\xi \\
&\quad + 2|\nabla\varphi|^2 u^2 e^\xi.
\end{aligned}$$

Setzen wir diese Identitäten und Ungleichungen zusammen und verwenden zusätzlich $\partial_t \xi + |\nabla_g \xi|^2 \leq 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_M u^2\varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu\Big|_a^b &= \int_a^b \int_M (\partial_t \xi)\varphi^2 u^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t + 2\int_a^b\int_M (\Delta_\mu u)u\varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_a^b \int_M \left(-|\nabla\xi|^2 u^2 - |\nabla u|^2 + 2|\nabla u||\nabla\xi||u|\right)\varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t \\
&\quad + 4\int_a^b\int_M |\nabla\varphi|^2 u^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_a^b\int_M (|\nabla u| - |\nabla\xi||u|)^2 \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t + 4\int_a^b\int_M |\nabla\varphi|^2 u^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

und somit

$$\int_M u^2\varphi^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu\Big|_a^b \leq 4\int_a^b\int_M |\nabla\varphi|^2 u^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t.$$

Der Satz von Rademacher impliziert $|\nabla\varphi|^2 \leq 1/R^2$. Aufgrund der anderen Eigenschaften von φ folgt

$$\begin{aligned}
\int_{B^\rho_R(o)} u(b,x)^2 e^{\xi(x,b)} \,\mathrm{d}\mu(x) &\leq \int_{B_{4R}(o)} u(a,x)^2 e^{\xi(x,a)} \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\quad + \frac{4}{R^2}\int_a^b \int_{B^\rho_{4R}(o)\setminus U^\rho_{2R}(o)} u^2 e^\xi \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Nun wählen wir ρ und s. Sei $\rho : M \to \mathbb{R}$, $\rho(x) := (\rho(x,o) - R)_+$ und $s := 2b - a$. Für alle $t \in [a,b]$ gilt dann

Zeichnung

$$b - a \leq s - t \leq 2(b-a)$$

und damit

$$\xi(t,x) = -\frac{\rho(x)^2}{4(s-t)} \le -\frac{\rho(x)^2}{8(b-a)} \le 0.$$

Ferner ist $\xi \equiv 0$ auf $B_R^\rho(o)$ und $\rho \ge R$ auf $B_{4R}^\rho(o) \setminus U_{2R}^\rho(o)$, weswegen

$$\xi \le -\frac{R^2}{8(b-a)} \text{ auf } [a,b] \times B_{4R}^\rho(o) \setminus U_{2R}^\rho(o).$$

Eingesetzt in die letzte Ungleichung liefern diese Beobachtungen

$$\begin{aligned}\int_{B_R(o)} u(b,x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \le &\int_{B_{4R}(o)} u(a,x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \\ &+ \frac{4n}{R^2} \exp\left(-\frac{R^2}{8(b-a)}\right) \int_a^b \int_{B_{4R}(o)} u^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Die Funktion u erfüllt laut Annahme

$$\int_a^b \int_{B_{4R}^\rho(o)} u^2 \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}t \le \exp(f(4R))$$

und unsere hergeleitete Ungleichung vereinfacht sich weiter zu

$$\int_{B_R^\rho(o)} u(b,x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \le \int_{B_{4R}^\rho(o)} u(a,x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) + \frac{4n}{R^2} \exp\left(-\frac{R^2}{8(b-a)} + f(4R)\right).$$

Falls ($\Diamond$) erfüllt ist, gilt

$$-\frac{R^2}{8n(b-a)} + f(4R) \le 0.$$

Damit ist die gewünschte Ungleichung bewiesen. $\square$

Beweis. Theorem über die Eindeutigkeitsklasse der Wärmeleitungsgleichung: Sei $u \in C^\infty((0,T) \times M)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit $u(t,\cdot) \to 0$ in $L^2_{\text{loc}}(\mu)$. Wie im vorigen Lemma definieren wir $u(0,x) := 0$ für alle $x \in M$.

Die Idee des Beweises ist es, das vorherige Lemma zu nutzen, um $u(t,\cdot)$ auf einer vorgegebenen Kugel durch $u(0,\cdot) = 0$ auf einer größeren Kugel bis auf einen kleinen Fehler abzuschätzen. Da das Lemma aber nur für kleine Zeiten gilt, muss iterativ vorgegangen werden.

Sei $R > 0$ beliebig und $0 < t < T$. Wir setzen $R_k := 4^k R$, $\tau_0 = 0$ und

$$\tau_k := \frac{1}{128} \frac{R_k^2}{f(R_k)}, \; k \in \mathbb{N}.$$

Nun definieren wir Zeiten

Zeichnung

$$t_k := \begin{cases} t - \sum_{l=0}^k \tau_l & \text{falls } t - \sum_{l=1}^k \tau_l > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllen die Zeiten $0 \leq t_k < t_{k-1}$ und die Radien R_{k-1} gerade

$$t_{k-1} - t_k \leq \tau_k = \frac{1}{128} \frac{R_k^2}{f(R_k)} = \frac{1}{128} \frac{16 R_{k-1}^2}{f(4R_{k-1})} = \frac{R_{k-1}^2}{8 f(4R_{k-1})}$$

und damit die Bedingung ($\Diamond$) aus dem vorherigen Lemma. Ungleichung ($\heartsuit$) liefert

$$\int_{B_{R_{k-1}}(o)} u(t_{k-1}, x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \int_{B_{R_k}(o)} u(t_k, x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) + \frac{4}{R_{k-1}^2},$$

weshalb durch Induktion folgt

$$\begin{aligned} \int_{B_R(o)} u(t,x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) &\leq \int_{B_{R_k}(o)} u(t_k, x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) + \sum_{l=1}^{k} \frac{4}{R_{l-1}^2} \\ &\leq \int_{B_{R_k}(o)} u(t_k, x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) + \frac{C}{R^2}. \end{aligned}$$

Dabei ist $C > 0$ eine Konstante, welche nicht von k abhängt. Wir müssen nun noch zeigen, dass $t_k = 0$ für ein endliches k, da dann die Behauptung aus $u(0, \cdot) = 0$ und dem Grenzübergang $R \to \infty$ in der letzten Ungleichung folgt.

Da f monoton wachsend ist, folgt aus der Wachstumsbedingung für f

$$\infty = \int_R^\infty \frac{r}{f(r)} \,\mathrm{d}r \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{R_k}^{R_{k+1}} \frac{r}{f(r)} \,\mathrm{d}r \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_{k+1}^2}{f(R_k)}.$$

Wir erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tau_k = \infty$$

und das Theorem ist bewiesen. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] Alexander Grigor'yan. *Heat kernel and analysis on manifolds*, volume 47 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009.

[2] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.

[3] Daniel Lenz. *Höhere Analysis I.* Skript. Wintersemester 2017/2018.

[4] S. B. Myers and N. E. Steenrod. The group of isometries of a Riemannian manifold. *Ann. of Math. (2)*, 40(2):400–416, 1939.

[5] Richard S. Palais. On the differentiability of isometries. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8:805–807, 1957.

[6] Dirk Werner. *Funktionalanalysis.* Springer-Verlag, Berlin, extended edition, 2007.