Analysis II

Wintersemester 2015/16 **Marcel Schmidt**

Blatt 8 **Abgabe Mittwoch 16.12.2015**

(1) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist stetig differenzierbar für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Die Richtungsableitungen von f in $(0,0)$ existieren für alle Richtungen.

(c) f ist in $(0,0)$ nicht stetig.

(2) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) \quad = \quad \begin{cases} (x^2+y^2)^{3/2} \sin \frac{1}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

(a) g ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

(b) Die partiellen Ableitungen sind bei $(0,0)$ nicht stetig.

Bemerkung: Stetigkeit der partiellen Ableitungen ist also nur ein hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit!

(3) Sei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben. Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := g(|x|) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^N.$$

(a) Beweisen Sie, dass f genau dann differenzierbar ist, wenn g differenzierbar ist mit $g'(0) = 0$.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von f unter der Bedingung, dass f differenzierbar ist.

(4) Zeigen Sie die Differenzierbarkeit der folgenden Funktionen und berechnen Sie deren Jacobimatrizen.

(a) $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}^M$.

(b) $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f(x) = c + \langle a, x\rangle$ mit $a \in \mathbb{R}^N$, $c \in \mathbb{R}$.

(c) $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f(x) = c + \langle a, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Bx, x\rangle$ mit $a \in \mathbb{R}^N$, $c \in \mathbb{R}$ und wobei $B : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine lineare, symmetrische Abbildung ist.

Erinnerung: Eine lineare Abbildung $B : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ heißt symmetrisch, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass $\langle Bx, y\rangle = \langle x, By\rangle$.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, $f(t) = x_0 + tv_0$ mit $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^N$.