Höhere Analysis II

Wintersemester 2018/2019 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 6 **Abgabe Donnerstag 29.11.2018**

(1) Sei $C_c^\infty(0,1)$ der Vektorraum Funktionen auf $(0,1)$, die beliebig oft differenzierbar sind und außerhalb einer kompakten Teilmenge von $(0,1)$ verschwinden. Zeigen Sie, daß der Operator T in $L^2((0,1),\lambda)$ mit $D(T) = C_c^\infty(0,1)$, $Tf = -f''$ nicht wesentlich selbstadjungiert ist.

(2) Sei μ ein komplexes Maß auf $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(x) = \mu((-\infty, x))$. Zeigen Sie, daß für $x \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{C}$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es ist f in x differenzierbar mit $f'(x) = c$.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{\mu(I)}{\lambda(I)} - c \right| \leq \varepsilon$$

für alle Intervalle I um x mit $0 < |I| < \delta$ (wobei $|I|$ die Länge von I bezeichnet).

(3) Zeigen Sie: Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ mit $f \neq 0$ gehört $M(f)$ nicht zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$. (Hinweis: Zeigen Sie $M(f)(x) \geq \frac{c}{|x|^N}$ für große x.)

(4) Sei $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ beschränkt. Zeigen Sie

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f \, d\lambda$$

in jedem Stetigkeitspunkt x von f.