Höhere Analysis

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 12 **Abgabe Mittwoch 10.02.2009**

(1) Sei V ein reeller Vektorraum mit einer Norm $\|\cdot\|$ für welche die Parallelogramm-Identität erfüllt ist, also

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

für alle $x, y \in V$ gilt. Zeigen Sie, dass dann die Norm von einem Skalarprodukt induziert wird.
Hinweis: Polarisationsidentität

(2) Finden Sie einen dicht definierten Operator $T : \ell^2 \to \ell^2$, so dass gilt $D(T^*) = \{0\}$.

(3) Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ heißt absolut stetig wenn es eine Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ gibt mit der Eigenschaft

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(y)\, dy.$$

Die Funktion g wird dann als schwache Ableitung bezeichnet, $f' = g$. Desweiteren sei

$$W^{1,2}(0,1) := \{f : [0,1] \to \mathbb{C},\ f \text{ absolut stetig}, f' \in L^2(0,1)\}.$$

Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle_1 : V \times V \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\langle f, g\rangle_1 := \int_0^1 f(x)\bar{g}(x) + f'(x)\bar{g}'(x)\, dx$$

definiert ein Skalarprodukt.

(ii) $(W^{1,2}(0,1), \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ ist ein Hilbertraum.

(iii) Für jedes $x_0 \in [0,1]$ ist $F_{x_0}(f) = f(x_0)$ ein stetiges lineares Funktional auf $W^{1,2}(0,1)$.

(4) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein komplexer Hilbertraum und $s : H \times H \to \mathbb{C}$ eine stetige Sesquilinearform, d.h. es existiert ein $M > 0$ so dass für alle $x, y \in H$ gilt

$$|s(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|.$$

Zeigen Sie, dass dann ein stetiger Operator T existiert, so dass für alle $x, y \in H$ gilt

$$s(x, y) = \langle Tx, y \rangle.$$

Hinweis: Darstellungssatz von Riesz.