Höhere Analysis

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 4 **Abgabe Mittwoch 25.11. 2009**

(1) Sei c_0 bzw. c der Raum der Nullfolgen bzw. der konvergenten Folgen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Norm $\|x\|_\infty := \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

(a) Es ist c mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum und es gilt $c = c_0 + \mathrm{lin}\{(1, 1, 1, \dots)\}$.

(b) Die stetigen linearen Funktionale F auf c sind gegeben durch

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n x_n + f_0 \lim_{n\to\infty} x_n$$

mit $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$, $\|f\|_1 = \|F\|$.

(2) Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $F \in (\ell^\infty)'$ mit $F(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ für alle $x \in c$.

(b) Nicht jedes stetige lineare Funktional auf ℓ^∞ läßt sich durch ein $f \in \ell^1$ darstellen.

(3) Zeigen Sie:

(a) Für $1 \le p < q \le \infty$ gilt die Inklusion $\ell^p \subset \ell^q$, genauer gilt sogar

$$\|x\|_q \le \|x\|_p$$

für alle $x \in \ell^p$.

(b) Für jedes $1 \le p \le \infty$ ist c_c ein Teilraum von ℓ^p und es gilt

$$\|x\|_p \to \|x\|_\infty$$

für $p \to \infty$.

(c) Es gilt $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ für $p \to \infty$ für alle $x \in \ell^1$.

(4) Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und φ ein lineares Funktional auf X mit Nullraum $\mathrm{Kern}(\varphi) := \{x \in X : \varphi(x) = 0\}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein $y \in X$, so dass sich jedes $x \in X$ darstellen läßt als $x = z + cy$ mit $z \in \mathrm{Kern}(\varphi)$ und $c \in \mathbb{K}$. Ist $\varphi \neq 0$, so ist diese Darstellung eindeutig.

(b) Ist X normiert, so ist φ genau dann stetig, wenn $\mathrm{Kern}(\varphi)$ abgeschlossen ist.