Analysis II

Wintersemester 2015/16 **Marcel Schmidt**

Blatt 12 **Abgabe Mittwoch 03.02.2016**

(1) Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Familie von Teilmengen von X. Zeigen Sie:

(a) Die Menge

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap_{\mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra mit } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

ist eine σ-Algebra.

(b) Ist $\mathcal{B}$ eine weitere σ-Algebra mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, so gilt $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}$.

(c) Sei $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $\mathcal{F} = \{\{1,2\},\{1,2,3\},\{3,4,5,6\}\}$. Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{F})$. Gilt $\{2,4\} \in \sigma(\mathcal{F})$?

(2) Auf den reellen Zahlen seien die folgenden Mengenfamilien $\mathcal{F}_i$ gegeben.

$$\mathcal{F}_1 := \{(a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\},\ \mathcal{F}_2 := \{(-\infty,a) \mid a \in \mathbb{R}\},\ \mathcal{F}_3 := \{[a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{F}_4 := \{(-\infty,a] \mid a \in \mathbb{R}\},\ \mathcal{F}_5 := \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\},\ \mathcal{F}_6 := \{I \mid I \subseteq \mathbb{R} \text{ ist Intervall}\}$$

Zeigen Sie $\sigma(\mathcal{F}_1) = \ldots = \sigma(\mathcal{F}_6)$.

(3) Sei $X \neq \emptyset$. Ist die Menge

$$\mathcal{A}_1 := \{A \subseteq X \mid A \text{ ist abzählbar oder } X \setminus A \text{ ist abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra? Unter welchen Vorraussetzungen an X ist

$$\mathcal{A}_2 := \{A \subseteq X \mid A \text{ ist endlich oder } X \setminus A \text{ ist endlich}\}$$

eine σ-Algebra?

(4) Zeigen Sie, dass jede σ-Algebra entweder endlich oder überabzählbar ist.

Anleitung: Nehmen Sie an, es gäbe eine abzählbar unendliche σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf der Menge X. Für $x \in X$ betrachten Sie die Menge

$$M_x := \bigcap_{x \in B, B \in \mathcal{A}} B.$$

Zeigen Sie:

(a) $M_x \in \mathcal{A}$.

(b) Entweder es gilt $M_x = M_y$ oder $M_x \cap M_y = \emptyset$.

Nutzen Sie diese Beobachtungen um in den folgenden Fällen einen Widerspruch zu erzeugen.

Fall 1: Ist die Menge $\{M_x \mid x \in X\}$ endlich, so ist $\mathcal{A}$ endlich.

Fall 2: Ist $M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots$ eine Folge verschiedener Mengen, so ist die Abbildung

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}, \quad F \mapsto \bigcup_{i \in F} M_{x_i}$$

injektiv, also $\mathcal{A}$ überabzählbar.