Anwendung von Operatortheorie - Notizen[1]

Jena - Wintersemester 2013 / 2014

Matthias Keller, Daniel Lenz

[1]Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Konstruktive Kommentare sind willkommen.

Inhaltsverzeichnis

Einfuehrung

Es geht um Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren. Die Eigenschaften eines selbstadjungierten Operator A werden kodiert durch die zugehoerigen Greensfunktionen

$$G_f(z) = \langle f, (A-z)^{-1} f \rangle$$

fuer $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ und f aus dem Hilbertraum. Es bildet G_f die obere Halbebene in die obere Halbebene ab und ist analytisch. Solche Funktionen koennen charakterisiert werden als die Borel-Transformation eines Maßes, d.h. es gilt

$$G_f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t-z}$$

mit einem geeigneten Mass $\mu = \mu_f$. Dieses Mass μ heisst Spektralmass (von A zu f). Diese Charakterisierung ist ein wesentlicher Satz.

Die gesamte Spektraltheorie von A ergibt sich direkt aus den Eigenschaften der μ. Zu deren Untersuchung kann man in zwei Schritten vorgehen:

- Untersuchung von G_f.
- Untersuchung der Beziehung zwischen G_f und μ.

Besonders augenfällig werden die entsprechenden Zusammenhaenge fuer eindimensionale Schroedingeroperatoren. In diesem Fall gibt es ein enges Wechselspiel zwischen den Eigenschaften der Loesungen der entsprechenden Differenzen / Differentialgleichung und den Eigenschaften von G_f. Damit erhaelt man fuer diese Operatoren einen

- Zusammenhang zwischen Loesungen und Spektralmaßen.

Diese Themen werden wir in der Vorlesung vertiefen.

KAPITEL 1

Etwas Maß- und Integrationstheorie

Das Konzept des Maßes stellt eine praezise (und sehr allgemeine) Fassung von Volumenmessung zur Verfuegung. Die charakteristische Eigenschaft ist

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

fuer paarweise disjunkte A_n, $n \in \mathbb{N}$. Basierend auf einem Maß koennen dann Funktionen integriert werden. Im allgemeinen kann nicht allen Mengen ein Maß zugeordnet werden, und es koennen nicht alle Funktionen integriert werden. Die 'guten' Mengen bzw. Funktionen heissen *meßbar*.

1. σ-Algebren und meßbare Funktionen

In diesem Abschnitt lernen wir die 'guten' Mengen und Funktionen kennen.

Definition (σ-Algebra). *Sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine Familie von Teilmengen von X. Dann heißt $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, wenn folgende Eigenschaften erfuellt sind:*

- *X gehoert zu $\mathcal{A}$.*
- *Mit A gehoert auch $X \setminus A$ zu $\mathcal{A}$.*
- *Mit A_n, $n \in \mathbb{N}$, gehoert auch $\bigcup_n A_n$ zu $\mathcal{A}$.*

Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X, so heisst $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und die Mengen von $\mathcal{A}$ werden meßbar genannt.[1]

Eine σ-Algebra ist also abgeschlossen unter Komplementbildung und abzaehlbaren Vereinigungen und enthaelt jedenfalls den ganzen Raum.

Bemerkung. Es ist $\{X, \emptyset\}$ eine σ-Algebra auf X und in jeder anderen enthalten.

Proposition (Einfache Eigenschaften). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum. Dann gilt:*

(a) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$.
(b) $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, $\Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
(c) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$.
(d) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

[1] Im Zuge der sogenannten Rechtschreibereform wurde das Konzept der Meßbarkeit abgeschafft und durch das Konzept der Messbarkeit ersetzt. In diesem Text werden beide Konzepte synonym verwendet.

Beweis. (a) Waehle $A_j = \emptyset$ fuer $j = n+1, ...$; nutze dritte Eigenschaft.
(b) Das folgt durch doppelte Komplementbildung:

$$\bigcap_n A_n = X \setminus (\bigcup_n (X \setminus A_n)).$$

(c) Das folgt aus (b) nach Wahl von $A_j = X$ fuer $j = n+1, ...$
(d) Das folgt aus $A \setminus B = A \bigcap (X \setminus B)$. □

Bemerkung. Zum besseren Verstaendnis mag ein Vergleich mit dem Konzept der Topologie dienen: Eine Topologie τ auf X ist eine Familie von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

- $\emptyset, X \in \tau$.
- Mit $U_1, \ldots, U_n$ gehoert auch $\bigcap_j U_j$ zu τ.
- Mit U_α, $\alpha \in A$, gehoert auch $\bigcup_\alpha U_\alpha$ zu τ.

Man kann σ-Algebren aus einer gegebene Familie von Teilmengen erzeugen.

THEOREM (Erzeugung von σ-Algebren durch $\mathcal{F}$). *Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen von X. Dann existiert genau eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf X mit folgenden beiden Eigenschaften:*

- $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$.
- *Gilt $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ fuer eine σ-Algebra $\mathcal{B}$, so folgt $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.*

Beweis. *Eindeutigkeit.* Das ist klar. (Seien $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, solche σ-Algebren. Waehle $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}$ und schliesse $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Vertausche nun die Rollen von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$.)
Existenz. Es existiert ein σ-Algebra, die $\mathcal{F}$ enthaelt (z.B. die Potenzmenge von X). Der Durchschnitt aller solcher σ-Algebren ist wieder ein σ-Algebra (Check!) und enthaelt $\mathcal{F}$ (Check!). Er hat nach Konstruktion die gewuenschten Eigenschaften. □

DEFINITION. *In der Situation des vorigen Theorems nennt man $\mathcal{A}$ die durch $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra und schreibt sie auch als $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.*

Beispiel. Sei $X = \mathbb{R}$ und seien die Familien $\mathcal{F}_i$ gegeben als:
$\mathcal{F}_0$: Intervalle der Form (a, ∞), $a \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{F}_1$: Alle Intervalle.
$\mathcal{F}_2$: Alle offenen Intervalle.
$\mathcal{F}_3$: Alle Intervalle der Form $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{F}_4$: Intervalle der Form $[a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{F}_5$: Intervalle der Form $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{F}_6$: Intervalle der Form (a, b), $a \in \mathbb{R}$.
Dann gilt $\mathcal{A}(\mathcal{F}_0) = \ldots = \mathcal{A}(\mathcal{F}_6)$.
Beweis. Uebung. Nutze Formeln der folgenden Art:

$$[a, b) = \bigcap_n (a - 1/n, b), (a, b) = \bigcup_n [a + 1/n, b), (a, b) = (a, \infty) \setminus [b, \infty)...$$

□

DEFINITION (Borel-σ-Algebra). *Ist (X, τ) ein topologischer Raum, so heisst die von τ erzeugte σ-Algebra die Borel - σ - Algebra auf X.*

Beispiele.
(a) Ist $X = \mathbb{R}$, so ist die Borel-σ-Algebra gerade die oben schon diskutierte von den offenen Intervallen erzeugte σ-Algebra. (Da jede offene Menge eine Vereinigung von abzaehlbar vielen offenen Intervallen ist.)
(b) Ist $X = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty\} \bigcup \{\infty\}$ die Zweipunktkompaktifiziertung von $\mathbb{R}$ mit der von den Intervallen (a, b), $(a, \infty]$ und $[-\infty, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, erzeugten Topologie, so wird die Borel-σ-Algebra erzeugt z.b. durch die Familie

$$(a, \infty], a \in \mathbb{R}.$$

(c) Ist $X = \mathbb{R}^N$, so wird die Borel-σ-Algebra erzeugt durch die Rechtecke der Form

$$R = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N)$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ mit $a_i \leq b_i$ fuer $i = 1, \ldots, N$.

DEFINITION (Meßbarkeit). *Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, meßbare Raeume. Eine Funktion $f : X_1 \longrightarrow X_2$ heisst meßbar, wenn $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1$ fuer alle A aus $\mathcal{A}_2$ gilt.*

Bemerkung. (a) Vergleiche Charakterisierung der Stetigkeit.
(b) Offenbar sind konstante Funktionen meßbar (da die auftretenden Urbilder entweder leer oder der gesamte Raum sind).

Aus der Definition folgt sofort, dass die Komposition meßbarer Funktionen wieder meßbar ist:

PROPOSITION (Komposition meßbarer Funktionen ist meßbar). *Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2, 3$ meßbare Räume und $f : X_1 \longrightarrow X_2$ und $g : X_2 \longrightarrow X_3$ meßbar. Dann ist auch $g \circ f : X_1 \longrightarrow X_3$ meßbar.*

Wesentlich ist folgende Vertraeglichkeit von Funktionen mit den charakteristischen Eigenschaften einer σ-Algebra.

PROPOSITION. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion. Dann ist die Menge*

$$\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra.

Beweis. Bezeichne die genannte Menge mit $\mathcal{A}_f$. Dann gilt:
- $Y \in \mathcal{A}_f$: Klar (da $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$).
- $B \in \mathcal{A}_f \Longrightarrow B^c \in \mathcal{A}_f$: $f^{-1}(B^c) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ (wegen $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$).
- $B_n \in \mathcal{A}_f \Longrightarrow \bigcup B_n \in \mathcal{A}_f$: $f^{-1}(\bigcup_n B_n) = \bigcup_n f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ (wegen $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$).

$\square$

Uebung. Untersuche entsprechende Aussage fuer Topologien.

LEMMA (Reicht Urbilder des Erzeuger zu testen). *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ meßbare Raeume und $\mathcal{B}$ sei von der Familie $\mathcal{F}$ erzeugt. Dann sind fuer $f : X \longrightarrow Y$ aequivalent:*

(i) *Es ist f meßbar.*
(ii) *Es ist $f^{-1}(B)$ meßbar fuer alle $B \in \mathcal{F}$.*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Das ist klar.
(ii)$\Longrightarrow$ (i): Betrachte $\mathcal{A}_f := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Dann gilt:
- $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_f$ (nach (ii)).
- $\mathcal{A}_f$ ist eine σ-Algebra (nach voriger Proposition).

Damit folgt dann nach Konstruktion der erzeugten σ-Algebra

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_f.$$

Das beendet den Beweis. □

Wir ziehen einige Folgerungen aus dem vorigen Lemma.

FOLGERUNG (Stetige Funktionen sind meßbar). *Seien (X_i, τ_i), $i = 1, 2$, topologische Raeume mit den zugehoerigen Borel - σ -Algebren $\mathcal{B}_i$. Ist $f : X_1 \longrightarrow X_2$ stetig, so ist es meßbar.*

Beweis. Da $\mathcal{B}_2$ von τ_2 erzeugt wird, reicht es nach dem vorigen Lemma zu zeigen, dass $f^{-1}(U)$ meßbar ist fuer alle $U \in \tau_2$. Es gilt aber

$$f^{-1}(U) \in \tau_1 \subset \mathcal{B}_1,$$

da f stetig ist und $\mathcal{B}_1$ von τ_1 erzeugt ist. □

Wir ziehen nun Folgerungen fuer meßbare reellwertige Funktionen. Insbesondere werden wir sehen, dass die alle 'ueblichen' Operationen Meßbarkeit erhalten. Insbesondere bleibt Meßbarkeit (ANDERS als Stetigkeit) unter punktweisen Grenzwerten erhalten.

Konvention. Wenn es um Meßbarkeit von Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R} \bigcup \{-\infty\} \bigcup \{\infty\}$) geht, wird $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R} \bigcup \{-\infty\} \bigcup \{\infty\}$) immer mit der Borel - σ - Algebra versehen.

Aus dem vorigen Lemma und den verschiedenen Arten die Borel-σ-Algebra zu erzeugen, erhaelt man sofort:

FOLGERUNG. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \bigcup \{\infty\} \bigcup \{-\infty\}$) eine Funktion. Dann sind aequivaelent:*
(i) *Es ist f Borel-meßbar.*
(ii) *Es ist $f^{-1}(I)$ meßbar fuer alle Intervalle I.*
(iii) *Es ist $f^{-1}(a, \infty]$ meßbar fuer alle $a \in \mathbb{R}$.*
(iv) *Es ist $f^{-1}[-\infty, a)$ meßbar fuer alle $a \in \mathbb{R}$.*

Bemerkung. Aus (ii) in der Folgerung folgt sofort, dass mit f auch $-f$ meßbar ist.

THEOREM. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und seien $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R} \bigcup \{-\infty\} \bigcup \{\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$, meßbare Funktionen. Dann sind auch die Funktionen*

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup_n f_n \quad \textit{und} \quad \liminf_n f_n$$

meßbar.

Beweis. Setze $g = \sup f_n$. Dann gilt

$$g^{-1}(a, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a, \infty])$$

und dies ist meßbar als abzaehlbare Vereinigung meßbarer Mengen. Aehnlich kann man $\inf f_n$ behandeln. Damit folgen dann auch die Aussagen fuer

$$\limsup_n f_n = \inf_k \left(\sup_{n \geq k} f_n \right)$$

und

$$\liminf_n f_n = \sup_k \left(\inf_{n \geq k} f_n \right).$$

Das beendet den Beweis. □

Aus dem Theorem erhalten wir die folgende sehr bemerkenswerte Konsequenz (vgl. obige Bemerkung zur Stetigkeit):

FOLGERUNG (Punktweise Grenzwerte sind meßbar). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum. Konvergiert die Folge der meßbaren Funktionen*

$$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$

punktweise gegen die Funktion f, so ist f meßbar.

Aus dem Theorem erhaelt man auch sofort folgendes Ergebnis.

FOLGERUNG. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum. Sind $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar, so sind auch $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ meßbar. Insbesondere sind auch $f_+ = \max\{f, 0\}$ und $f_- = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\}$ meßbar.*

Ende der 1. Vorlesung

THEOREM (Komponentenweise Meßbarkeit impliziert Meßbarkeit). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $f_1, \ldots, f_N : X \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar. Dann ist auch die Funktion*

$$F : X \longrightarrow \mathbb{R}^N, F(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x)),$$

meßbar.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß die Urbilder von Rechtecken meßbar sind. Sei $R = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N)$ ein solches Rechteck. Dann gilt

$$F^{-1}(R) = \bigcap_{j=1}^{N} f_j^{-1}(a_j, b_j)$$

und das ist meßbar als endlicher Schnitt meßbarer Mengen. □

FOLGERUNG. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und seien $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar. Dann sind $f + g$ und fg meßbar.*

Beweis. Wir betrachten nur fg. Der Fall $f + g$ kann analog behandelt werden. Sei

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \phi(u, v) = uv.$$

Dann ist ϕ stetig und damit meßbar. Sei weiterhin

$$F : X \longrightarrow \mathbb{R}^2, F(x) = (f(x), g(x)).$$

Dann ist F nach dem vorangehenden Theorem meßbar. Damit ist

$$fg = \phi \circ F$$

als Verknuepfung meßbarer Funktionen wieder meßbar. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes führen wir noch eine besonders schoene Klasse von meßbaren Funktionen ein.

Definition (Einfache Funktionen). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum. Eine meßbare Funktion $s : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt einfach, wenn ihr Wertebereich endlich ist.*

Bemerkung. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die verschiedenen Werte der einfachen Funktion s, so sind die Urbilder $A_j := \{x \in X : s(x) = \alpha_j\}$ (Niveaumengen) meßbar und disjunkt mit Vereinigung X, und es gilt

$$s = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}.$$

Sind umgekehrt $A_1, \ldots, A_n$ meßbar (und nicht notwendig disjunkt) und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, so ist $\sum \alpha_j 1_{A_j}$ einfach. (Tatsaechlich ist diese Funktion meßbar als Summe meßbarer Funktionen und nimmt (offenbar) nur endlich viele Werte an.)

Meßbare Funktionen koennen gut durch einfache Funktionen approximiert werden.

Theorem (Approximation durch einfache Funktionen). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ meßbar. Dann existieren einfache Funktionen s_n, $n \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften:*

- $0 \leq s_1 \leq ...s_n \leq s_{n+1} \leq ... \leq f$.
- $s_n(x) \to f(x)$ *fuer alle* $x \in X$.

Bemerkung. (Uebung) Ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar und beschraenkt, so laesst es sich gleichmaessig durch einfache Funktionen approximieren.

Beweis. Sei fuer $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $\phi_n : [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty)$ definiert durch

$$\phi_n(t) = n, \text{ falls } n \leq t$$

und

$$\phi_n(t) = \frac{k}{2^n} \text{ falls } k/2^n \leq t < \tfrac{(k+1)}{2^n} \text{ fuer ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq k < 2^n.$$

Dann nehmen die ϕ_n nur endlich viele Werte an und sind meßbar, und es gilt:

- $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x) \leq x$ fuer alle $x \in [0, \infty]$.
- $\phi_n(x) \to x$ fuer alle $x \in [0, \infty]$.

Damit folgt leicht, dass $s_n := \phi_n \circ f$ die gewuenschten Eigenschaften hat. □

2. Maße und Integration positiver Funktionen

In diesem Abschnitt lernen wir Maße kennen. Das Konzept des Maßes verallgemeinert die Idee der Volumenmessung.

Definition (Maß). *Sei* $(X, \mathcal{A})$ *ein meßbarer Raum. Eine Abbildung*

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$$

heißt Maß, wenn gilt:

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *fuer alle meßbaren paarweise diskunkten* A_n, $n \in \mathbb{N}$.

Ist μ *ein Maß auf* $(X, \mathcal{A})$, *so nennt man das Tripel* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *einen Maßraum. Das Maß* μ *heißt endlich, wenn* $\mu(X) < \infty$ *gilt.*

Bemerkungen.

- Die zweite Bedingung ist die entscheidenden Bedingung. Sie ist als σ-*Additivitaet* bekannt.
- Gegeben die zweite Bedingung, so ist die Bedingung $\mu(\emptyset) = 0$ aequivalent dazu, dass es eine Menge A in $\mathcal{A}$ gibt mit $\mu(A) < \infty$ (Uebung). Sie dient also nur dazu den trivialen Fall auszuschliessen.

Beispiel (Zaehlmaß) Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{A}$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$. Dann ist

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty], \ \ \mu(E) = \sharp E$$

ein Maß (wobei $\sharp E$ die Anzahl der Element von E bezeichnet). Dieses Maß heisst das Zaehlmaß auf X. Auf abzaehlbaren Mengen (z.b. fuer $X = \mathbb{N}$) ist das Zaehlmaß ein sehr natuerliches Maß. Alle Punkte haben dann das gleiche 'Gewicht'.

Proposition (Einfache Eigenschaften). *Sei* μ *ein Maß auf* $(X, \mathcal{A})$.
(a) Sind $A_1, \ldots, A_n$ *meßbar und disjunkt, so gilt*

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

(b) Sind A, B *meßbar mit* $A \subset B$, *so gilt*

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

und insbesondere $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Beweis. (a) Setze $A_{n+1} = A_{n+2} = ... = \emptyset$ und nutze σ-Additivitaet und $\mu(\emptyset) = 0$.
(b) Das folgt aus (a) mit $A_1 = A$ und $A_2 = B \setminus A$. $\square$

Proposition (Kleiner Grenzwertsatz). *Sei* μ *ein Maß auf* $(X, \mathcal{A})$. *Seien* $A_1 \subset A_2 \subset ...$ *meßbar. Dann gilt fuer* $A = \bigcup_n A_n$ *die Beziehung*

$$(*) \ \ \mu(A) = \lim_n \mu(A_n).$$

Sind $A_1 \supset A_2 \supset ...$ *meßbar mit* $\mu(A_1) < \infty$. *Dann gilt fuer* $A = \bigcap_n A_n$

$$\mu(A) = \lim_n \mu(A_n).$$

Bemerkung. (a) Ist μ additiv, so ist σ-Additivitaet aequivalent zu $(*)$. In diesem Sinne is $(*)$ eine fundamentale Eigenschaft des Maßes.
(b) Setzt man $A = \lim A_n$ (was in beiden Faellen naeheliegt), so besagt die Proposition gerade

$$\mu(\lim_n A_n) = \lim_n \mu(A_n).$$

In diesem Sinne handelt es sich um eine Stetigkeitseigenschaft von μ.
(c) Die Voraussetzung $\mu(A_1) < \infty$ in der zweiten Behauptung ist notwendig. Betrachte zum Beispiel $\mathbb{N}$ mit dem Zaehlmaß und den meßbaren Mengen $A_n = [n, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mu(A_n) = \infty$ aber $\mu(A) = 0$ (da $A = \emptyset$).

Beweis. Erste Aussage: Setzte $B_1 := A_1$ und $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ fuer $n \geq 2$. Dann gilt:

- $A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$ und damit auch $A = \bigcup_{k=1}^\infty B_k$.
- Die B_n sind paarweise disjunkt und meßbar.

Damit folgt dann aus der σ-Additivitaet:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(\bigcup_k B_k) \\ (\sigma - Additivitaet) \quad &= \sum_{k=1}^\infty \mu(B_k) \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \\ &= \lim_n \mu(A_n). \end{aligned}$$

Zweite Aussage: Das folgt aus der ersten Aussage nach Komplementbildung und Subtraktion des endlichen (!) $\mu(A_1)$: Setze $C_n := A_1 \setminus A_n$. Dann gilt $C_1 \subset C_2 \subset .....$ Sei $C = \bigcup C_n$. Dann gilt nach der ersten Aussage

$$\mu(C) = \lim_n \mu(C_n).$$

Weiterhin gilt

$$\mu(C_n) = \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$$

sowie

$$\mu(C) = \mu\left(\bigcup_n C_n\right) = \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_n A_n\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_n A_n\right).$$

Damit folgt die Behauptung. □

Definition (Integral einfacher Funktionen). *Sei* μ *ein Maß auf* $(X, \mathcal{A})$. *Sei* s *eine einfache nichtnegative Funktion mit den verschiedenen Werten* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *und den zugehoerigen Niveaumengen* $A_j = \{x \in X : s(x) = \alpha_j\}$, *also* $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j}$. *Dann definiert man*

$$\int s d\mu = \int_X s d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j).$$

Bemerkung - Rechnen in $[0,\infty]$. In dieser Definition (wie auch an anderen Stellen) brauchen wir Arithmetik d.h. Addition und Multiplikation auf $[0,\infty]$. Diese werden so definiert:

$$a\cdot\infty = 0 \quad \text{fuer } a=0, \;\; a\cdot\infty=\infty \text{ sonst.}$$

$$a+\infty=\infty \text{ fuer alle } a\in[0,\infty].$$

Fuer $a,b\in[0,\infty)$ werden $a+b, a\cdot b$ wie ueblich definiert. Mit diesen Definitionen laeßt sich dann problemlos addieren und multiplizieren. (Probleme treten erst dann auf, wenn man subtrahieren will. Zum Beispiel laesst sich aus $a+c=b+c$ im allgemeinen NICHT schliessen $a=b$ usw.)

Proposition (Wohldefiniert). *Sei μ ein Maß auf $(X,\mathcal{A})$. Ist $s=\sum_{j=1}^m \beta_j 1_{B_j}$ eine einfache Funktion mit disjunkten (meßbaren) B_j und nichtnegativen β_j, $j=1,\ldots,m$. Dann gilt*

$$\int s d\mu = \sum_{j=1}^n \beta_j\mu(B_j).$$

Beweis. Ohne Einschraenkung seien alle β_j von Null verschieden. (Ein Term mit $\beta_j=0$ traegt zur gewuenschten Summe sowieso nicht bei.) Seien $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ die von Null verschiedenen Werte von s und $A_i=\{x\in X: s(x)=\alpha_i\}$ die zugehoerigen Niveaumengen. Dann setzen sich die A_i aus den B_j (disjunkt) zusammen, da die B_j disjunkt sind und das liefert die Behauptung. Hier ist die genaue Buchhaltung: Sei

$$S_k=\{j:\beta_j=\alpha_k\}$$

fuer $k=1,\ldots,n$. Dann gilt (aufgrund der Disjunktheit der B_j)

$$A_k=\bigcup_{j\in S_k} B_j,$$

wobei die Vereinigung disjunkt ist. Damit folgt also

$$\mu(A_k)=\sum_{j\in B_k}\mu(B_j).$$

Das liefert insgesamt

$$\begin{aligned}\sum_k \alpha_k\mu(A_k) &= \sum_k \alpha_k\left(\sum_{j\in S_k}\mu(B_j)\right)\\ &= \sum_k\sum_{j\in S_k}\beta_j\mu(B_j)\\ &= \sum_j \beta_j\mu(B_j).\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Proposition (Einfache Eigenschaften des Integrals einfacher Funktionen). *Sei μ ein Maß auf $(X,\mathcal{A})$. Seien s,t einfache nichtnegative Funktionen.*
(a) Gilt $s\le t$ so folgt $\int sd\mu\le\int td\mu$.
(b) Mit $\lambda>0$ gilt $\int(s+\lambda t)d\mu=\int sd\mu+\lambda\int td\mu$.

Beweis. (a) Das ist klar.
(b) Sei $s = \sum_j^n \alpha_j 1_{A_j}$ und $t = \sum_{k=1}^m \beta_k 1_{B_k}$. Ohne Einschraenkung $n = m$ und $A_j = B_j$ (sonst Betrachten von $A_j \bigcap B_k$ und nutzen der Proposition zur Wohldefiniertheit). Nun folgt die Aussage einfach. □

DEFINITION (Integral nichtnegativer Funktionen). *Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Fuer ein meßbares $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ definiert man*

$$\int f d\mu := \int_X f d\mu := \sup_{0 \leq s \leq f,\ s\ :einfach} \int s d\mu$$

und nennt dies das Integral von f ueber X bzgl. μ. (Hier ist der Wert ∞ fuer das Integral erlaubt.)

Bemerkung. Aus der Definition ergeben sich sofort zwei nuetzliche Beobachtungen:

- Gilt $\int f d\mu < \infty$, so ist $\mu(\{x \in X : f(x) = \infty\}) = 0$. (Andernfalls: Setze $A := \{x \in X : f(x) = \infty\}$ und betrachte $s = n 1_A$ fuer $n \in \mathbb{N}$...)
- Sei $S := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Gilt $\mu(S) = 0$, so folgt $\int f d\mu = 0$. (Betrachte eine beliebige einfache Funktion s mit $0 \leq s \leq f$. Dann gilt $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j 1_{A_j}$ mit disjunkten A_j. Jedes A_j mit $\alpha_j \neq 0$ ist nun eine Teilmenge von S und erfuellt damit $\mu(A_j) \leq \mu(S) = 0$. Damit folgt sofort $\int s d\mu = 0$. Das liefert die gewuenschte Behauptung.)

Ende der 2.Vorlesung

PROPOSITION (Monotonie des Integrals). *Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Seien $f, g : X \longrightarrow [0, \infty]$ meßbar mit $f \leq g$. Dann gilt $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.*

Beweis. Das ist klar. □

Wir lernen nun DAS THEOREM zur Konvergenz von Integralen nichtnegativer Funktionen kennen. Die meisten der anschliessend diskutierten Aussagen sind Folgerungen aus diesem Theorem.

THEOREM (Monotone Konvergenz / Satz von Beppo Levi). *Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Seien $f_n : X \longrightarrow [0, \infty]$ meßbar mit $f_n \leq f_{n+1}$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Sei f der punktweise Grenzwert der f_n. Dann ist f meßbar und nichtnegativ und es gilt*

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Bemerkung. Aufgrund von $f_n \leq f_{n+1}$ existiert der punktweist Grenzwert der f_n.

Beweis. Es ist f meßbar als punktweiser Grenzwert meßbarer Funktionen. Aufgrund der Monotonie des Integrals gilt

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu.$$

Insbesondere existiert also

$$\alpha = \lim_n \int f_n d\mu$$

und es gilt
$$\alpha \leq \int f d\mu.$$
Noch zu zeigen $\alpha \geq \int f d\mu$: Sei s eine einfache Funktion mit $0 \leq s \leq f$ und $c \in (0,1)$. Betrachte
$$E_n := \{x \in X : f_n(x) \geq cs(x)\}.$$
Dann gilt
$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset ...$$
und
$$X = \bigcup_n E_n.$$
($f(x) = 0$ liefert $x \in E_1$, $f(x) > 0$ liefert $x \in E_n$ fuer genuegend grosses n wegen $f_n(x) \to f(x)$.) Damit folgt aus der Monotonie des Integrals also
$$\begin{aligned} \int f_n d\mu &\geq \int f_n 1_{E_n} d\mu \\ &\geq c \int s 1_{E_n} d\mu \\ &\stackrel{!}{\to} c \int s d\mu. \end{aligned}$$
Nimmt man (fuer den Moment) die letzte Konvergenz als bewiesen an, so kann man schliessen
$$\alpha = \lim_n \int f_n d\mu \geq c \int s d\mu$$
fuer alle einfachen s mit $0 \leq s \leq f$ und alle $c \in (0,1)$. Damit folgt
$$\alpha \geq \int f d\mu.$$
Es bleibt die Aussage (!) zu beweisen: Wegen $X = \bigcup_n E_n$ und den schon bekannten Aussagen ueber Konvergenz von Maßen, reicht es zu zeigen, dass
$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty], \phi(E) = \int s 1_E d\mu$$
ein Mass ist. Das folgt durch direkte Rechnung fuer einfache Funktionen. □

Bemerkung (Philosophie) Weiter oben haben wir den 'kleinen Grenzwertsatz' kennengelernt:
$$\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$$
fuer $A_1 \subset A_2 \subset ...$ mit $A = \bigcup A_n$. Dieser Satz ist natuerlich ein Spezialfall des vorangehenden Theorems (mit $f_n = 1_{A_n}$ und $f = 1_A$). Umgekehrt liegt er (fuer das Maß ϕ statt μ) dem Beweis des Theorems zugrunde. In diesen Sinne ist das Theorem nicht anderes als eine (extrem nuetzliche) Umformulierung des kleinen Grenzwertsatzes. Dieser Satz wiederum ist, wie oben schon diskutiert, im wesentlichen aequivalent zur σ-Additivitaet. Damit sind σ-Additvitaet, kleiner Grenzwertsatz und vorangehendes Theorem im wesentlichen nichts anderes als verschiedene Perspektiven auf dasselbe Geschehen.

Als Folgerung erhalten wir die Linearitaet des Integrals und viel mehr.

FOLGERUNG. *Sei μ ein Maß auf $(X,\mathcal{A})$. Seien $f_n : X \longrightarrow [0,\infty]$ meßbar. Dann gilt*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Bemerkung. Auch hier sind (natuerlich) die auftretenden Summem im Sinne der Arithmetik in $[0,\infty]$ zu verstehen.

Beweis. Wir zeigen zunaechst $\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ fuer meßbare nichtnegative f,g. Nach dem Theorem zur Approximation meßbarer Funktionen existieren monoton wachstende Folgen einfacher nichtnegativer Funktionen s_n und t_n mit $s_n \to f$ und $t_n \to g$. Dann konvergiet also $t_n + s_n$ monoton wachstend gegen $f+g$. Damit folgt mit zweimaliger Anwendung des vorigen Theorem und der Linearitaet des Integrals fuer einfache Funktionen dann

$$\begin{aligned}\int (f+g)d\mu &= \lim_n \int (s_n + t_n) d\mu \\ &= \lim_n \left(\int s_n d\mu + \int t_n d\mu\right) \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$

Damit koennen wir nun zur eigentlichen Aussage kommen: Wir setzen

$$g_N := \sum_{k=1}^{N} f_k.$$

Dann konvergieren die g_N monoton wachsend gegen $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Damit folgt aus dem vorigen Theorem und der Vorueberlegung dann

$$\int f d\mu = \lim_N \int g_N d\mu = \lim_N \sum_{k=1}^{N} \int f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k d\mu.$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Bemerkung /Anwendung. Betrachte $\mathbb{N}$ versehen mit dem Zaehlmaß und $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow [0,\infty]$. Dann gilt

$$\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij}.$$

(Beweis: $f_i : \mathbb{N} \longrightarrow [0,\infty], f_i(j) = a_{ij}...$)

THEOREM (Lemma von Fatou). *Sei μ ein Maß auf $(X,\mathcal{A})$. Seien $f_n : X \longrightarrow [0,\infty]$ meßbar. Dann gilt*

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Bemerkung. Im allgemeinen ist die Ungleichung strikt. Betrachte zum Beispiel $\mathbb{N}$ mit dem Zaehlmaß und $f_n = 1_{\{k\}}$ (fuehrt auf $0 \leq 1$) oder $f_n = 1_{\{k \geq n\}}$ (fuehrt auf $0 \leq \infty$).

Beweis. Setzt $g_k := \inf_{n\geq k} f_n$. Dann ist g_k meßbar und nichtnegative. Nach Konstruktion konvergiert (g_k) monoton wachsend gegen $\liminf_n f_n$. Damit folgt aus dem Theorem ueber monotone Konvergenz

$$\int \liminf_n f_n d\mu = \lim_k \int g_k d\mu$$

fuer alle $k \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt $g_k \leq f_k$ und wir erhalten also

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \int f_k d\mu$$

fuer alle $k \in \mathbb{N}$. Bildet man auf der rechten (und der linken ;-) Seite den $\liminf$ ueber k, so folgt die gewuenschte Aussage. $\square$

PROPOSITION (Maße mit Dichte). *Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ und $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ meßbar. Dann ist*

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty], \phi(E) := \int f 1_E d\mu$$

ein Maß, und es gilt

$$\int g d\phi = \int g f d\mu$$

fuer alle meßbaren $g \geq 0$. Insbesondere gilt $\phi(E) = 0$ fuer alle E mit $\mu(E) = 0$.

Beweis. Der erste Teil der Aussage ('ϕ ist Maß') folgt leicht aus dem Satz ueber Monotone Konvergenz. Der zweite Teil der Aussage ('$\int g d\phi = \int g f d\mu$') folgt fuer $g = 1_A$ direkt aus der Definition und damit dann fuer einfache Funktionen aus der Linearitaet und dann fuer allgemeine meßbare Funktionen nach Grenzuebergang unter Nutzen des Satzes ueber Monotone Konvergenz. Die letzte Aussage folgt einfach aus dem vorangehenden. $\square$

Bemerkung. Ein Maß ν mit $\nu(E) = 0$ falls $\mu(E) = 0$ heißt absolut stetig bzgl. μ. Die Proposition besagt also unter anderem, dass ϕ absolut stetig bzgl. μ ist. Tatsaechlich gilt auch die Umkehrung 'Satz von Radon-Nikodym' (falls μ σ-endlich ist, d.h. es meßbare Mengen A_n gibt mit $\mu(A_n) < \infty$ und $\bigcup A_n = X$): Ist ν absolut stetig bzgl. μ so existiert eine meßbare Funktion $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ mit $\nu(E) = \int 1_E f d\mu$.

Die

DEFINITION (Das Maß $f\mu$). *Sei μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ und $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ meßbar und ϕ das Maß aus der vorigen Proposition. Dann heißt f die Dichte des Maßes ϕ bzgl. μ und man definiert $f\mu := \phi$.*

Fuer gewisse Situationen erweist es sich als praktisch auch **Einschraenkungen von σ-Algebren und Maßen auf meßbare Teilmengen** zur Verfuegung zu haben. Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E \subset X$ meßbar, so ist - wie man leicht sieht -

$$\mathcal{A}_E := \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra auf E und

$$\mu_E : \mathcal{A}_E \longrightarrow [0, \infty], \;\; \mu_E(B) := \mu(B)$$

ein Maß. Fuer meßbare $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ gilt dann

$$\int f 1_E d\mu = \int f|_E d\mu_E.$$

(Das ist klar fuer $f = 1_A$ mit $A \in \mathcal{A}$ und folgt dann aufgrund der Linearitaet fuer allgemeine einfache Funktionen und dann aus monotoner Konvergenz fuer beliebige meßbare Funktionen.) Wir schreiben auch

$$\int_E f d\mu \text{ statt } \int f d\mu_E.$$

3. Integration komplexer Funktionen und $\mathcal{L}^1(X, \mu)$

Im vorangehenden Abschnitt haben wir die Integration nichtnegativer Funktionen kennengelernt. In diesem Abschnitt lernen wir die Integration von komplexwertigen Funktionen mit einer gewissen Beschraenktheitseigenschaft kennen. Damit haben wir dann die beiden gaengigen Varianten von Integrationstheorie kennengelernt. Eine aehnliche Situation ist uns auch in Analysis I schon begegnet bei der Summation von Folgen: Man hat eine ueberzeugende Theorie fuer Folgen mit nichtnegativen Gliedern und eine weitere ueberzeugende Theorie fuer absolut konvergente Folgen. Tatsaechlich sind entsprechende Betrachtungen ein Spezialfall unserer Erwaegungen hier (mit dem Raum der natuerlichen Zahlen versehen mit dem Zaehlmaß).

Definition. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann definieren wir*

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^1(X, \mu) = \mathcal{L}^1(X)$$

als die Menge der meßbaren Funktionen $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\int |f| d\mu < \infty.$$

Fuer ein solches f mit Realteil u und Imaginaerteil v (also $f = u + iv$) definieren wir dann

$$\int f d\mu := \int u_+ d\mu - \int u_- d\mu + i \int v_+ d\mu - i \int f_- d\mu.$$

Bemerkungen.

- Hier ist $\mathbb{C}$ mit der Borel-σ-Algebra versehen. Dann bedeutet Meßbarkeit von $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ gerade, dass die entsprechende Funktion

  $$\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}^2, \widetilde{f}(x) = (\Re f(x), \Im f(x))$$

  meßbar ist.
- f meßbar $\Longrightarrow |f| = |\cdot| \circ f$ meßbar.
- Es gilt (einfach): f meßbar $\Longleftrightarrow \Re f, \Im f$ meßbar. Damit sind insbesondere die auftretenden Terme $u_\pm$ und $v_\pm$ meßbar und nichtnegativ. Daher existieren die entsprechenden Integrale.
- Alle Integrale auf der rechten Seite der angegebenen Gleichung sind endlich (aufgrund von $|u_\pm| \leq |u| \leq |f|$ und $|v_\pm| \leq |v| \leq |f|$).

THEOREM ($\mathcal{L}^1$ ist Vektorraum). *Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Seien $f,g \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ und $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann gehoert auch $\alpha f+\beta g$ zu $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ und es gilt*

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

Beweis. *$\alpha f+\beta g \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$:* Es ist $\alpha f+\beta g$ meßbar als Linearkombination meßbarer Funktionen.
Zur Gleichung: Uebung. □

Ende der 3. Vorlesung

PROPOSITION (Dreiecksungleichung). *Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Dann gilt*

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$$

fuer alle $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$.

Beweis. Waehle $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $|\int f d\mu| = \alpha \int f d\mu$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left|\int f d\mu\right| &= \alpha \int f d\mu \\ &= \int \alpha f d\mu \\ \text{(Linke Seite reell)} \quad &= \int \Re(\alpha f) d\mu \\ (\Re(\alpha f) \leq |\alpha f| = |f|) \quad &\leq \int |f| d\mu. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Auf $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ wird durch

$$\|f\|_1 := \int |f| d\mu$$

eine Halbnorm definiert. Durch entsprechende Quotientenbildung (s.u.) entsteht dann ein vollstaendiger (!) normierter Raum.

Der wesentliche Grenzwertsatz zur Integration nichtnegativer Funktionen ist das Monotone - Konvergenz - Theorem. Der entsprechende Grenzwertsatz zur Integration in $\mathcal{L}^1$ ist das folgende Theorem. Es ist (natuerlich ;-) eine Folge aus dem Theorem ueber monotone Konvergenz in Form des Lemma von Fatou.

THEOREM (Dominierte Konvergenz / Satz von Lebesgue). *Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Seien $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ meßbare Funktionen mit $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$, fuer alle $x \in X$. Gibt es ein $g \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ mit $|f_n| \leq g$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$, so gehoert auch f zu $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ und es gilt*

$$\int |f_n - f| d\mu \to 0, n \to \infty$$

und damit insbesondere

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Beweis. Es ist f meßbar als Grenzwert meßbarer Funktionen und es gilt $|f| \leq g$ (da $|f_n| \leq g$ und f der punktweise Grenzwert der f_n ist). Damit gehoert f zu $\mathcal{L}^1$.

Wir zeigen nun die Konvergenz: Betrachte

$$h_n := 2g - |f_n - f| \geq 0.$$

Dann gilt $h_n \geq 0$ und $h_n \to 2g$ punktweise. Damit folgt aus dem Lemma von Fatou also

$$\begin{aligned}
\int 2g d\mu &= \int \lim h_n d\mu \\
\text{(Fatou)} \quad &\leq \liminf_n \int h_n \\
&= \liminf_n \left(\int 2g d\mu - \int |f_n - f| d\mu \right) \\
\text{(Rechenregeln lim inf)} \quad &= \int 2g d\mu - \limsup_n \int |f_n - f| d\mu.
\end{aligned}$$

Wegen $g \in \mathcal{L}^1$ ist $\int 2g d\mu$ endlich und wir koennen es auf beiden Seiten subtrahieren und erhalten

$$\limsup_n \int |f_n - f| d\mu \leq 0.$$

Da die auftretenden Integranden nichtnegativ sind, folgt

$$0 \leq \liminf_n \int |f_n - f| d\mu \leq \limsup_n \int |f_n - f| d\mu \leq 0$$

und wir erhalten

$$0 = \lim_n \int |f_n - f| d\mu.$$

Das ist gerade die erste Aussage. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann die letzte Aussage. $\square$

Wir gehen nun auf die (verschwindende) Rolle von Nullmengen in der Theorie ein. Hier heißt eine Menge *Nullmenge*, wenn sie meßbar ist und ihr Maß gerade Null ist.

Definition (Gültigkeit μ - fast überall). *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{P}$ eine Eigenschaft, die ein Element von X haben kann. Dann gilt $\mathcal{P}$ μ-fast-überall (μ-f.ü. oder auch nur f.ü.), wenn es ein N in $\mathcal{A}$ gibt mit folgenden Eigenschaften:*

- $\mu(N) = 0$.
- *Es gilt $\mathcal{P}$ fuer alle $x \in X \setminus N$.*

Bemerkungen.

- Natuerlich haengt das Konzept der Nullmenge bzw. der Gueltigkeit fast überall stark vom gegebenen Maß μ ab. Betrachtet man z. B. $X = \mathbb{N}$ mit dem Zaehlmaß, so gilt ein Eigenschaft fast-überall genau dann, wenn sie fuer alle Punkte gilt.

- Man beachte, daß nicht gefordert wird, daß die Menge
$$\{x:\ \mathcal{P} \text{ gilt nicht fuer } x\}$$
eine Nullmenge ist. Tatsaechlich kann es sein, daß diese Menge gar nicht meßbar ist (s.u.).

Beispiele fuer gaengige Eigenschaften $\mathcal{P}$ eines $x \in X$:

- $f(x) > 0$ (fuer gegebenes f).
- $f(x) = g(x)$ (fuer gegebene f und g).
- $f_n(x)$ konvergiert bzw. $f_n(x)$ konvergiert nicht (fuer gegebenen Folge (f_n)).

Anwendung - Integration fast überall gleicher Funktionen. Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Dann wird durch
$$f \sim g \Longleftrightarrow \quad f = g \ \mu \text{ -f.ü.}$$
eine Aequivalenzrelation auf den mßbaren Funktionen definiert (wie man leicht sieht). Gilt $f \sim g$, so gehoert f zu $\mathcal{L}^1$ genau dann, wenn g zu $\mathcal{L}^1$ gehoert. In diesem Fall gilt dann
$$\int f 1_E d\mu = \int g 1_E d\mu$$
fuer alle meßbaren E.

Bew. Sei N eine Nullmenge mit $f = g$ auf $X \setminus N$ (z.B. kann man $N = \{x : f(x) \neq g(x)\}$ waehlen). Dann gilt $\mu(N \cap E) = 0$ fuer alle meßbaren E. Damit folgt
$$\begin{aligned}
\int f 1_E d\mu &= \int f(1_{E\setminus N} + 1_{E\cap N}) d\mu \\
&= \int f 1_{E\setminus N} d\mu + \int f 1_{E\cap N} d\mu \\
(\mu(E\cap N) = 0) \quad &= \int f 1_{E\setminus N} d\mu \\
(f = g \text{ auf } E\setminus N) \quad &= \int g 1_{E\setminus N} d\mu \\
(\mu(E\cap N) = 0) \quad &= \int g 1_{E\setminus N} d\mu + \int g 1_{E\cap N} d\mu \\
&= \int g(1_{E\setminus N} + 1_{E\cap N} d\mu \\
&= \int g 1_E d\mu.
\end{aligned}$$
Das beendet den Beweis.

Soweit es um Integration geht, koennen also f und g nicht unterschieden werden. Das legt es nahe, eine Integrationstheorie fuer die Klassen zu entwickeln. Man definiert
$$L^1(X) := L^1(X,\mu) := L^1(X,\mathcal{A},\mu) := \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)/\sim$$
und setzt
$$\int : L^1(X,\mu) \longrightarrow \mathbb{C}, \int [f] d\mu := \int f d\mu.$$

Nach den vorhergehenden Ueberlegungen ist das wohldefiniert. Dann wird $L^1(X,\mu)$ mit

$$\|[f]\|_1 := \int |f| d\mu$$

zu einem vollstaendigen normierten Raum. Wir werden in dieser Vorlesung diesen Raum nicht benoetigen.

Anwendung - Behandlung fast überall definierte Funktionen. Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Sei f f.ü. definiert d.h. es gebe eine Nullmenge N so daß f auf $X\setminus N$ definiert ist. Dann heißt f meßbar, wenn

$$f^{-1}(V)\cap(X\setminus N)$$

meßbar ist fuer alle meßbaren V. Dann ist (Uebung) f genau dann meßbar, wenn die Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f auf $X\setminus N$ durch Null meßbar ist. Man ueberlege sich, dass diese Definition nicht davon abhaengt, welche der (unter Umstaenden mehreren) möglichen Nullmengen N man waehlt. Dann definiert man

$$\int f d\mu := \int_{X\setminus N} f d\mu.$$

Das beendet die Anwendung.

Gilt $\mu(N)=0$ so erwartet man natuerlich $\mu(E)=0$ fuer alle $E\subset N$. Tatsaechlich kann man diese Beziehung zeigen fuer diejenigen $E\subset N$, die zu $\mathcal{A}$ gehoeren:

$$0\le\mu(E)\le\mu(E)+\mu(N\setminus E)=\mu(N)=0.$$

Fuer diejenigen $N\subset E$, die nicht zu $\mathcal{A}$ gehoeren, kann man es nicht zeigen, da ja $\mu(E)$ gar nicht definiert ist. Das ist unter Umstaenden unpraktisch. Gluecklicherweise kann man aber Teilmengen von Nullmengen zur σ-Algebra hinzufuegen. Das ist der Inhalt des folgenden Theorem.

THEOREM (Vervollstaendigung der σ-Algebra bzgl. eines Maßes). *Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Sei $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$ die Familie aller Teilmengen E von X fuer die $A,B\in\mathcal{A}$ existieren mit*

- *$A\subset E\subset B$,*
- *$\mu(B\setminus A)=0$.*

Dann ist $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{A}$ enthaelt und jede Teilmenge einer μ-Nullmenge. Weiterhin wird durch

$$\overline{\mu}:\overline{\mathcal{A}}^{\mu}\longrightarrow[0,\infty],\overline{\mu}(E)=\mu(A)=\mu(B)$$

ein Maß auf $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$, das μ fortsetzt.

Bemerkungen.

- Hat der Maßraum $(X,\mathcal{A},\mu)$ die Eigenschaft, dass jede Teilmengen einer Nullmenge wieder meßbar ist, so heißt er vollstaendig. Es heißt $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$ die Vervollstaendigung von $\mathcal{A}$ bzgl. μ und $\overline{\mu}$ die Vervollstaendigung von μ.
- Es ist $(X,\mathcal{A},\mu)$ vollstaendig genau dann, wenn $\mathcal{A}=\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$ gilt (aufgrund der Minimalitaet).

- Das Theorem besagt, dass wir ohne Einschraenkung annehmen koennen, daß der Maßraum des Definitionsbereiches der Funktionen vollstaendig ist.
- **!!! Vorsicht** bei der Vervollstaendigung des Bildraumes der Funktionen: Es kann pasieren, dass eine meßbare Funktion nach Vervollstaendigen des Bildraumes nicht mehr meßbar ist (da man nun mit viel mehr Mengen testen muss).

Beweis. Wir zeigen eine Reihe von Behauptungen, die zusammengenommen das Theorem liefern.

Es ist $\overline{\mu}$ wohldefiniert: Seien $A \subset E \subset B$ und $A' \subset E \subset B'$ mit A, A', B, B' aus $\mathcal{A}$ und $\mu(B \setminus A) = 0 = \mu(B' \setminus A')$ gegeben. Dann gilt

$$A \setminus A' \subset E \setminus A' \subset B' \setminus A'.$$

Damit folgt

$$\mu(A \setminus A') \leq \mu(B' \setminus A') = 0,$$

und es ergibt sich

$$\mu(A) = \mu(A \cap A') + \mu(A \setminus A') = \mu(A \cap A').$$

sowie ganz analog durch Vertauschen von A und A'

$$\mu(A') = \mu(A \cap A').$$

Somit erhalt man insgesamt

$$\mu(A) = \mu(A').$$

Es ist $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$ eine σ-Algebra: Wir muessen drei Eigenschaften nachweisen.

- X gehoert zu $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$: Waehle $A = X = B$.
- Mit E gehoert auch $X \setminus E$ zu $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$: Das folgt direkt durch Komplementbildung an allen Stellen: Seien A, B aus $\mathcal{A}$ mit $A \subset E \subset B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$. Dann gehoeren B^c, A^c zu $\mathcal{A}$ und es gilt $B^c \subset E^c \subset A^c$ sowie $\mu(A^c \setminus B^c) = \mu(B \setminus A) = 0$ (da $A^c \setminus B^c = B \setminus A$).
- Mite E_n, $n \in \mathbb{N}$,gehoert auch $\bigcup_n E_n$ zu $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$: Das ist einfach.

Es enthaelt $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$ sowohl $\mathcal{A}$ als auch alle Teilmengen von μ-Nullmengen. Fuer E aus $\mathcal{A}$ kann man waehlen $A = E = B$. Fuer eine Teilmenge E einer Nullmenge N kann man waehlen $A = \emptyset$ und $B = N$.

Enthaelt die σ-Algebra $\mathcal{B}$ sowohl $\mathcal{A}$ als auch alle Teilmengen von μ-Nullmengen, so enthaelt sie $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$: Nach Konstruktion kann man jedes Element E aus $\overline{\mathcal{A}}^{\mu}$ darstellen als

$$E = A \bigcup S$$

mit A aus $\mathcal{A}$ und $S = E \setminus A \subset B \setminus A$ Teilmenge einer Nullmenge.

Es ist $\overline{\mu}$ σ-additiv: Das ist einfach. □

THEOREM. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ f.ü. definierte meßbare Funktionen mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty.$$

Dann existiert $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ f.ü. (als absolut konvergente Reihe), und es gehoert f zu $\mathcal{L}^1(X,\mu)$, und es gilt

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis. Wir finden eine Nullmenge, ausserhalb derer 'alles funktioniert'. Seien S_n meßbare Mengen mit $\mu(X \setminus S_n) = 0$, so dass f_n auf S_n definiert ist fuer jedes $n \in \mathbb{N}$. Sei $S := \bigcap_n S_n$. Dann gilt

$$\mu(X \setminus S) = \mu(\bigcup_n X \setminus S_n) = 0.$$

Sei

$$\varphi : X \longrightarrow [0, \infty]$$

auf $X \setminus S$ durch 0 definiert und auf S durch

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Dann gilt nach dem Satz ueber monotone Konvergenz

$$\int \varphi d\mu = \int_S \varphi d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty.$$

Aus der Endlichkeit folgt, dass

$$E := \{x \in X : \varphi(x) = \infty\}$$

das Maß Null hat. Dann ist also

$$G := S \cap (X \setminus E)$$

meßbar mit

$$\mu(X \setminus G) = \mu((X \setminus S) \cup E) = 0.$$

Auf G sind alle vorkommenden Funktionen definiert und es konvergiert φ absolut mit endlichen Werten. Insbesondere existiert also f auf G und es gilt $|f| \leq \varphi$ auf G und damit gehoert f zu $\mathcal{L}^1$ und nach dem Satz ueber dominierte Konvergenz folgt

$$\int f d\mu = \int_G f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_G f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Das beendet den Beweis. □

Ende der 4. Vorlesung.

4. Das Lebesgue-Maß

In den vorangehenden Abschnitten haben wir ausgehend von einem gegebenen Maßraum Theorie der Integration fuer nichtnegative und fuer $\mathcal{L}^1$ Funktionen entwickelt. Wir haben jedoch (vom Zaehlmass abgesehen) keine Beispiele fuer Maße diskutiert. In diesem Abschnitt lernen wir DAS Maß auf dem Euklidischen Raum kennen. Wir werden diese Maß charakterisieren, aber seine Existenz hier (aus Zeitgruenden) nicht beweisen.

THEOREM (Lebesgue Maß). *Sei $\mathcal{B}$ die Borel - σ - Algebra auf $\mathbb{R}^N$. Dann gibt es ein eindeutiges Maß λ auf $\mathcal{B}$ mit*

$$\lambda(R) = |R|$$

fuer alle Rechtecke R. Dabei ist fuer ein Rechteck $R = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N)$ das Volumen $|R|$ gegeben durch

$$|R| = \prod_{j=1}^{N} |b_j - a_j|.$$

Bemerkung. Der Satz besagt, daß das Volumen auf den Rechtecken (eindeutig) zu einem Maß fortgesetzt werden kann.

Bemerkung. Unter Rechteck verstehen wir hier (wie schon oben) immer offene Rechtecke.

Beweis. Wir koennen hier (aus Zeitgruenden) nicht die Existenz eines Maßes λ mit $\lambda(R) = |R|$ zeigen. Die Aussage ist eigentlich eine Forsetzungsaussage. Man kann sie zum Beispiel mittels des Caratheodoryschen Fortsetzungsatzes zeigen. Wir diskutieren die uebrigen Aussagen.

λ ist eindeutig: Seien λ_1 und λ_2 Maße mit der angegbenen Eigenschaft. Dann ist

$$\{A \in \mathcal{B} : \lambda_1(A) = \lambda_2(A)\}$$

abgeschlossen unter Vereinigung aufsteigender Mengen und dem Schnitt von absteigenden Mengen (mit endlichem Maß). Weiterhin enthaelt das System die schnittstabile Menge aller Rechtecke. Damit gilt dann nach sogenannten Monotonen Klassen Argumenten $\lambda_1 = \lambda_2$ auf der (von den Rechtecken erzeugten) Borel-σ-Algebra. □

DEFINITION. *Es heißt λ das Lebesguemaß und das Integral bzgl. des Lebesguemaßes wird als Lebesgue-Integral bezeichnet.*

Bemerkung - Lebesgue-Integral als Fortsetzung des Riemann-Integral. Es setzt das Lebegue-Integral das Riemann Integral fort in folgendem Sinne: Ist R ein (relativ kompaktes) Rechteck und $f : R \longrightarrow \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar so gilt fuer die Fortsetzung $\widetilde{f}$ von f auf $\mathbb{R}^N$ durch 0

$$\int_R f dx = \int \widetilde{f} d\lambda.$$

(Beweis. Das ist klar fuer einfache Funktionen, deren Niveaumengen Rechtecke sind. Der allgemeine Fall folgt durch Grenzuebergang.)

Das Lebesgue-Integral ist durch die Translationsinvarianz charakterisiert.

FOLGERUNG. *Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^N$. Dann sind aequivalent:*

(i) $\mu = \lambda$.
(ii) *Es ist μ translationsinvariant (d.h. es gilt $\mu(t + V) = \mu(V)$ fuer alle $t \in \mathbb{R}^N$ und alle meßbaren V) mit $\mu((0,1)^N = 1$.*

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Wir muessen zeigen, dass λ die beiden angegebenen Eigenschaften hat: Es gilt $\lambda((0,1)^N) = 1$ wegen $|(0,1)^N| = 1$. Um die Translationsinvarianz zu zeigen, betrachten wir fuer $t \in \mathbb{R}^N$ das Maß λ_t mit

$\lambda_t(A) := \lambda(t+A)$. Dann hat λ_t die charakteristischen Eigenschaften des Lebesguemaß und muss also mit diesem uebereinstimmen aufgrund der schon diskutierten Eindeutigkeit.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Wir betrachten nur $N = 1$ d.h. $\mathbb{R}$. Es gilt $\mu(\{pt\}) = 0$ (da sonst aufgrund der Translationsinvarianz $\mu((0,1)) = \infty$ gelten muesste.) Damit haengt also das Maß eines Interval nicht davon ab, ob die Randpunkte dazugehoeren oder nicht. Damit folgt aus der Tranlationsinvarianz also

$$\mu([0,1/n]) = \frac{1}{n}$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$, da

$$[0,1) = \bigcup_{k=0}^{n}(\frac{k}{n} + [0, \frac{1}{n})).$$

Damit hat dann (wieder nach Translationsinvarianz) jedes Intervall der Laenge $1/n$ das Maß $1/n$ und dann jedes Intervall der Laenge k/n das Maß k/n. Durch Ausschopfen eines beliebigen Intervalles durch solche mit rationaler Laenge erhaelt man dann, dass das Maß eines Intervalles gerade sein Laenge ist. Damit folgt (aus dem vorangehenden Theorem) dann $\mu = \lambda$. □

Bemerkung. Die Folgerung ist ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes fuer lokalkompakte abelsche Gruppen. Auf einer solchen Gruppe existiert ein (bis auf Normierung) eindeutiges translationsinvariantes Maß auf der Borel-σ-Algebra. Dieses Maß heißt das Haarmaß der Gruppe.

Beispiel einer nichtmeßbaren Menge. Betrachte $[0,1]$ mit der Einschraenkung des Lebesguemaß λ und die Aequivalenzrelation

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Waehle nun aus jeder Aequivalenzuklasse einen Repraesentanten und nenne die entstehende Menge E. (Dieser Schritt nutzt das Auswahlaxiom!) Wir zeigen, dass dieses E nicht meßbar ist.

Definiere

$$E_r := \{x + r \mod 1 : x \in E\} \subset [0,1)$$

fuer $r \in \mathbb{Q}$. Wie man leicht sieht, gilt dann folgendes:

- $E_r \cap E_s = \emptyset$ fuer $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $r \neq s \mod 1$.
- $[0,1) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} E_r$.

Waere E meßbar, so waeren auch alle E_r meßbar und haetten das gleiche Lebesguemaß (aufgrund der Translationsinvarianz). Damit erhielte man in diesem Fall aus den beiden Punkten

$$1 = \lambda([0,1)] = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \lambda(E_r) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \lambda(E).$$

Wir unterscheiden nun zwei Faelle:

$\lambda(E) = 0$*:* Dann gilt also $\lambda([0,1)) = 0$. Das ist ein Widerspruch.
$\lambda(E) > 0$*:* Dann gilt also $\lambda([0,1)) = \infty$. Das ist ein Widerspruch.

Bemerkung (Uebung). Aehnlich kann man zeigen, dass jedes $A \subset \mathbb{R}$ mit positivem Lebesguemass eine nichtmeßbare Teilmenge hat. (Umgekehrt hat natuerlich ein $A \subset \mathbb{R}$ mit Lebesguemaß Null nur meßbare Teilmengen bzgl. der Vervollstaendigung der Borel-σ-Algebra).

5. Maße und Integration auf lokalkompakten Räumen

In diesem Abschnitt untersuchen wir Maße auf lokalkompakten hausdorffschen Räumen.

THEOREM (Rieszscher Darstellungssatz). *Sei X ein lokalkompakter hausdorff Raum. Sei $\Lambda : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear und positiv (d.h. $\Lambda(f) \geq 0$ fuer alle $f \geq 0$). Dann existiert eine σ-Algebra $\mathcal{A}$, die die Borel-σ-Algebra enthaelt und ein eindeutiges positives Maß μ auf $\mathcal{A}$ mit*

$$\Lambda(f) = \int f d\mu$$

und folgenden Eigenschaften:

- *$\mu(K) < \infty$ fuer alle kompakten K.*
- *$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V \text{ offen}\}$ fuer alle meßbaren E.*
- *$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ kompakt}\}$ fuer alle offenen E und alle E mit $\mu(E) < \infty$.*
- *$\mathcal{A}$ ist vollstaendig.*

Aus Zeitgruenden beweisen wir hier den Satz hier nicht. Wir geben eine Reihe von Kommentaren.

Bemerkung.

- Ein Maß μ mit $\Lambda(f) = \int f d\mu$ heißt *Darstellungsmaß fuer* Λ.
- Jede kompakte Menge gehoert zur Borel-σ-Algebra, da sie abgeschlossen ist (da der Raum hausdorfsch ist).
- Ist ν ein Maß auf X mit $\nu(K) < \infty$ fuer alle kompakten K so gehoert $C_c(X)$ zu $\mathcal{L}^1(X, \nu)$. (Denn: $|f| \leq \|f\|_\infty 1_{\text{supp}(f)}$.) Mithilfe des Lemma von Urysohn kann man auch die Umkehrung zeigen.
- Ist ν ein Maß auf X mit $\nu(K) < \infty$ fuer alle kompakten K, so ist $\Lambda_\nu : C_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Lambda_\nu(f) := \int f d\nu$ ein positives lineares Funktional (wie man leicht sieht). Diese Maß muß nicht mit μ aus dem Theorem uebereinstimmen.

DEFINITION (Regularitaet). *Sei X ein lokalkompakter hausdorff Raum. Sei μ ein Maß auf der Borel-σ-Algebra. Dann heißt μ ein Borelmaß.*

(a) *Es heißt μ Radon-Maß, wenn $\mu(K) < \infty$ fuer alle kompakten K gilt.*

(b) *Es heißt μ von außen regulär, wenn*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V,\ V \text{ offen}\}$$

fuer alle meßbaren E gilt.

(c) *Es heißt μ von innnen regulaer, wenn*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\ K \text{ kompakt}\}$$

fuer alle meßbaren E gilt.

(d) *Es heißt μ regulaer, wenn es von innen und aussen regulaer ist.*

Bemerkung. Die Terminologie in der Literatur ist nicht ganz einheitlich was Radon-Maße betrifft.

Ende der 5. Vorlesung

THEOREM (Automatische Regularitaet). *Sei X ein lokalkompakter hausdorff Raum, in dem jede offene Menge σ-kompakt ist (d.h. eine abzaehlbare Vereinigung kompakter Mengen). Dann ist jedes Radonmaß (auf X) regulär.*

Bemerkung. Der euklidische Raum erfuellt die Voraussetzungen des Theorem.

Aus Zeitgruenden verzichten wir auf den Beweis des folgenden Satzes.

THEOREM (Lusin). *Sei X ein lokalkompakter hausdorff Raum und μ ein regulaeres Radonmaß auf X. Sei $f : C \longrightarrow \mathbb{C}$ meßbar und verschwinde außerhalb einer meßbaren Menge A mit endlichem Maß. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c(X)$ mit*

- $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$.
- $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

Bemerkung. Aus dem Theorem folgt nicht, daß f Stetigkeitspunkte besitzt, wie etwa folgendes Beispiel zeigt: $X = [0,1]$, μ die Einschraenkung des Lebesguemaß auf $[0,1]$ und $f = 1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Dann ist f unstetig in jedem Punkt. Es hat aber $g = 1$ die gewuenschten Eigenschaften fuer jedes $\varepsilon > 0$.

FOLGERUNG. *(Dichtheit von $C_c(X)$ in $\mathcal{L}^1$) Sei X ein lokalkompakter hausdorff Raum und μ ein Borelmaß auf X. Dann existiert zu jedem $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ und $\varepsilon > 0$ ein $h \in C_c(X)$ mit*

$$\|f - h\|_1 \leq \varepsilon.$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ gegeben. Sei fuer jedes $n \in \mathbb{N}$

$$X_n := \{x \in X : \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}.$$

Aus dem Satz ueber dominierte Konvergenz folgt leicht, daß die Folge $f_n := 1_{X_n} f$ gegen f konvergiert. Waehle nun $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_N - f\|_1 \leq \varepsilon/2$.
Mit $N 1_{X_N} \leq |f|$ folgt $\mu(X_N) \leq N\|f\|_1 < \infty$. Damit verschwindet also f_N außerhalb einer Menge mit endlichem Maß. Nach dem Theorem von Lusin existiert also ein $h \in C_c(X)$ mit

$$\|h\|_\infty \leq \|f_N\|_\infty \leq N$$

und

$$\mu(\{x : h(x) \neq f_N(x)\}) \leq \frac{\varepsilon}{4N}.$$

Damit folgt dann

$$\|f_N - h\|_1 \leq 2N\mu(\{x : h(x) \neq f_N(x)\}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\|f - h\|_1 \leq \|f - f_N\|_1 + \|f_N - h\|_1 \leq \varepsilon.$$

Das ist die gewuenschte Aussage. □

Bonusmaterial

Wir untersuchen nun auch noch die Konvergenz von Maßen auf lokalkompakten Räumen. Ist X ein lokalkompakter Raum, so hat man in natuerlicher Weise die Algebras $C_c(X)$ und $C_b(X)$ zur Verfuegung.

Definition (Vage Konvergenz). *Sei X ein lokalkompakter hausdorffscher Raum. Seien μ_n, $n \in \mathbb{N}$, und μ Radonmaße auf X. Es konvergiert (μ_n) vage gegen μ, wenn fuer jedes $\varphi \in C_c(X)$ gilt $\mu_n(\varphi) \to \mu(\varphi)$, $n \to \infty$.*

Beispiele.(Uebung) Sei $X = \mathbb{R}$ und $\mu_n := \delta_{x_n}$ fuer eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$. (Hier ist $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$.) Dann gilt:

- Ist die Folge (x_n) beschraenkt, so konvergiert die Folge (μ_n) vage genau dann, wenn die Folge (x_n) konvergiert. In diesem Fall ist der Grenzwert gerade gegeben durch $\mu = \delta_x$, wobei x der Grenzwert von (x_n) ist.
- Ist die Folge (x_n) unbeschraenkt, so konvergiert μ_n genau dann, wenn $|x_n| \to \infty$ gilt. In diesem Fall ist der Grenzwert gerade durch $\mu = 0$ gegeben.

Definition (Schwache Konvergenz). *Sei X ein lokalkompakter hausdorffscher Raum. Seien μ_n, $n \in \mathbb{N}$, und μ endliche Radonmaße auf X. Es konvergiert (μ_n) schwach gegen μ, wenn fuer jedes $\varphi \in C_b(X)$ gilt $\mu_n(\varphi) \to \mu(\varphi)$, $n \to \infty$.*

Bemerkung.

- Schwache Konvergenz ist gerade die Konvergenz der Maße als Elemente des Dualraumes von $C_b(X)$ im Sinne der schwachen Topologie.
- Offenbar impliziert schwache Konvergenz immer auch vage Konvergenz. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, sogar dann nicht, wenn die Gesamtmassen aller μ_n konstant sind. (Beispiel: $X = \mathbb{R}$, $\mu_n = \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$.)

Lemma. *Sei X ein lokalkompakter hausdorffscher Raum. Seien μ_n, $n \in \mathbb{N}$, und μ endliche von innen regulaere Borelmaße auf X. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es konvergiert (μ_n) schwach gegen μ.*
(ii) *Es konvergiert (μ_n) vage gegen μ, und es gilt $\mu_n(X) \to \mu(X)$.*
(iii) *Es konvergiert μ_n vage gegen μ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein kompaktes K in X mit $\mu_n(X \setminus K) \leq \varepsilon$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Das ist klar.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da μ ein endliches Maß und von innen regulaer ist, existiert ein kompaktes K mit $\mu(K) \geq \mu(X) - \varepsilon$. Weiterhin existiert nach dem Lemma von Urysohn ein stetiges $\varphi : X \longrightarrow [0,1]$ mit kompakten Traeger L und $\varphi = 1$ auf K. Insbesondere gilt also $0 \leq 1_K \leq \varphi \leq 1_L$. Dann folgt unter Ausnutzen der vagen Konvergenz also

$$\mu_n(L) \geq \int \varphi d\mu_n \to \int \varphi d\mu \geq \mu(K) \geq \mu(X) - \varepsilon.$$

Mit der Konvergenz der $\mu_n(X)$ gegen $\mu(X)$ folgt dann also (fuer alle genuegend großen n)

$$\mu_n(X \setminus L) = \mu_n(X) - \mu_n(L) \leq 3\varepsilon.$$

Damit folgt die gewuenschte Aussage (iii) leicht.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Ist φ eine beschraenkte stetige Funktion und K ein beliebiges Kompaktum, so kann man (nach dem Lemma von Urysohn) eine stetige Funktion ψ mit kompaktem Traeger finden mit $\varphi = \psi$ auf K und $\|\psi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$. Damit folgt die gewuenschte Aussage leicht. $\square$

Ende des Bonusmaterial.

6. Der Satz von Radon-Nikodym und die Lebesgue-Zerlegung

In diesem Abschnitt lernen wir eine weitere Klasse von Maßen kennen: die komplexen Maße. Sie stehen zu den positiven Maßen in einem aehnlichen Verhaeltnis wie $\mathcal{L}^1$ zu den nichtnegativen meßbaren Funktionen. Wir werden untersuchen, wie man ein komplexes Maß in Bezug auf ein gegebenes positives Maß zerlegen kann.

Definition (Komplexes Maß). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum. Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt komplexes Maß, wenn*

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

gilt fuer jede Zerlegung (E_n) von E. Hier heißt (E_n) ein Zerlegung von E, wenn die E_n, $n \in \mathbb{N}$, meßbar und paarweise disjunkt sind mit $E = \bigcup_n E_n$.

Bemerkung. Offenbar ist die Summe unbedingt konvergent (d.h. haengt nicht von der Reihenfolge der Summation ab). Damit ist sie dann absolut konvergent (nach einem bekannten Satz aus der Analysis).

Notation. Wir werden die bisher betrachteten Maße in diesem Abschnitt (meist) als positive Maße bezeichnen, um sie von den komplexen Maßen zu unterscheiden. Mit 'Maß' werden wir sowohl komplexe als auch positive Maße meinen.

Bemerkung. Offenbar ist jedes komplexe Maß mit reellen nichtnegativen Werten auch ein positives Maß. Die Umkehrung gilt aber nicht (da ein komplexes Maß nicht den Wert ∞ annehmen darf). Tatsaechlich sind die komplexen Maße mit Werten in in $[0, \infty)$ genau die positiven endlichen Maße, wie leicht aus dem folgenden Theorem folgt.

Unser naechstes Ziel ist es, zu einem komplexen Maß μ ein positives Maß ν zu finden mit

$$|\mu(E)| \leq \nu(E)$$

fuer alle meßbaren E. Falls es ein solches ν gibt, muß gelten

$$\nu(E) = \sum_n \nu(E_n) \geq \sum_n |\mu(E_n)|$$

fuer jede Zerlegung (E_n) von E. Das legt es nahe $|\mu|$ zu definieren als

$$|\mu|(E) := \sup_{(E_n) \text{ Zerlegung von } E} \sum_n |\mu(E_n)|.$$

Theorem. *Sei μ ein komplexes Maß. Dann ist $|\mu|$ ein positives Maß mit $|\mu|(X) < \infty$.*

Bemerkungen.

- Der zweite Teil der Aussage liefert, dass μ tatsaechlich nur Werte annimmt in der Kugel um 0 mit dem endlichen Radius $|\mu|(X)$.
- Es ist $|\mu|$ damit nach Konstruktion das kleinste positive Maß ν mit $|\mu(E)| \leq \nu(E)$ fuer alle meßbaren Mengen E.

Beweis. Wir zeigen zunaechst die σ-Additivitaet von $|\mu|$. Sei (E_n) ein Zerlegung von E. Zu zeigen:

$$|\mu|(E) = \sum_n |\mu|(E_n).$$

Die Ungleichung '$\geq$'. Sei zu jedem n ein beliebiges t_n mit $t_n < |\mu|(E_n)$ gewaehlt. Dann gibt es zu jedem E_n eine Zerlegung $A_{n,m}$, $m \in \mathbb{N}$, mit

$$t_n \leq \sum_m |\mu(A_{n,m})|.$$

Dann ist aber $(A_{n,m})_{n,m}$ eine Zerlegung von E und damit folgt

$$|\mu|(E) \geq \sum_{n,m} |\mu(A_{n,m})| = \sum_n \sum_m |\mu(A_{n,m})| \geq \sum_n t_n.$$

Da die t_n beliebig (mit $t_n < |\mu|(E_n)$) sind, folgt die gewuenschte Ungleichung.

Die Ungleichung '$\leq$'. Sei (A_m) ein Zerlegung von E. Setze

$$A_{n,m} := A_m \cap E_n$$

fuer $n, m \in \mathbb{N}$. Dann ist $(A_{n,m})_m$ fuer jedes n ein Zerlegung von E_n und es ist $(A_{n,m})_n$ fuer jedes m eine Zerlegung von A_m. Damit folgt dann

$$\begin{aligned}
\sum_m |\mu(A_m)| &= \sum_m \left| \sum_n \mu(A_{n,m}) \right| \\
&\leq \sum_{m,n} |\mu(A_{n,m})| \\
(Fubini) \quad &= \sum_n \sum_m |\mu(A_{n,m})| \\
&\leq \sum_n |\mu|(E_n).
\end{aligned}$$

Hier wird in der ersten Zeile genutzt, daß μ ein komplexes Maß ist und $(A_{n,m})_n$ eine Zerlegung von A_m und in der letzten Zeile wird die Definition von $|\mu|$ genutzt und daß $(A_{n,m})_m$ eine Zerlegung von E_n ist. Obige Ungleichungskette liefert die gewuenschte Ungleichung.

Ende der 6. Vorlesung.

Es gilt $|\mu|(X) < \infty$. Wir zeigen zunaechst eine Hilfsaussage.

Zwischenbehauptung. Gilt $|\mu|(E) = \infty$, so existieren disjunkte A, B mit $A \cup B = E$ und $|mu(A)| \geq 1$ und $|\mu|(B) = \infty$.

Beweis der Zwischenbehauptung. Nach Voraussetzung existiert eine Zerlegung (A_n) von E mit

$$\sum_n |\mu(A_n)| \geq 8(1 + |\mu(E)|).$$

Betrachten von Imaginaer- und Realteil liefert o.E.

$$\sum_n |\Re(\mu(A_n))| \geq 4(1+|\mu(E)|).$$

Zerlegen in Summanden mit positivem und negativem Realteil liefert dann eine Teilfolge A_{n_k} mit o.E.

$$\sum_k \Re(\mu(A_{n_k})) \geq 2(1+|\mu(E)|).$$

Insgesamt koennen wir dann also ohne Einschraenkung annehmen, dass

$$|\sum_{n=1}^N \mu(A_n)| \geq 1+|\mu(E)|$$

gilt. Setze

$$A := \bigcup_{n=1}^N A_n, \quad B := E \setminus A.$$

Dann gilt

$$|\mu(A)| = |\sum_{n=1}^N \mu(A_n)| \geq 1+|\mu(E)| \geq 1$$

und

$$|\mu(B)| = |\mu(E)-\mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)| \geq 1.$$

Da $|\mu|$ ein Maß ist, muss außerdem gelten

$$\infty = |\mu|(E)| = |\mu|(A) + |\mu|(B).$$

Damit hat also (mindestens) eine der Mengen A, B unendliches $|\mu|$ Maß. Ohne Einschraenkung sei dies B. Das beendet den Beweis der Zwischenbehauptung.

Gilt $|\mu|(X) = \infty$, so kann man mit der Zwischenbehauptung induktiv eine Folge von paarweise disjunkten Mengen A_n finden mit $|\mu(A_n)| \geq 1$. Dann konvergiert

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

nicht. Das ist ein Widerspruch. □

Bemerkung. Die komplexen Maße bilden eine Vektorraum mit

$$(\alpha\mu + \beta\nu)(E) := \alpha\mu(E) + \beta\nu(E).$$

Mittels $\|\mu\| := |\mu(X)|$ wird dies zu einem normierten Vektorraum. Dieser Raum ist vollstaendig (Uebung, Idee....).

Bemerkung - signierte Maße. Ein komlexes Maß mit reellen Werten heißt signiertes Maß. Ist μ ein signiertes Maß so definiert man Positiv- und Negativteil von μ durch

$$\mu^+ := \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- := \frac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

Dann sind $\mu^\pm$ positive Maße mit

$$\mu = \mu^+ - \mu^-.$$

Wir werden spaeter sehen, daß diese Zerlegung eine Minimalitaetseigenschaft hat.

DEFINITION (Absolut stetig). *Sei ν ein positives Maß und μ ein beliebiges Maß. Es heißt μ absolut stetig bzgl. ν, wenn $\mu(E) = 0$ fuer jedes E mit $\nu(E) = 0$ gilt. Dann schreibt man $\mu \ll \nu$.*

Die folgende Proposition 'erklaert' die Bezeichnung *absolut stetig.*

PROPOSITION. *Sei ν ein positives Maß und μ ein komplexes Maß. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist μ absolut stetig bzgl. ν.*
(ii) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $|\mu(E)| < \varepsilon$ falls $\nu(E) < \delta$.*

Bemerkung. Eine entsprechende Aussage gilt im allgemeinen nicht, wenn μ ein positives Maß ist: Sei ν die Einschraenkung des Lebesguemaß auf $[0, 1]$ und $\mu(E) = \int_E \frac{1}{t} d\nu(t)$. Dann gilt die Aussage der Proposition nicht, wie man leicht durch Betrachten von Intervallen der Form $I = [0, t]$ (mit $0 < t \leq 1$) sehen kann.

Beweis. (ii)$\Longrightarrow$ (i): Das ist einfach.

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Sei (ii) falsch. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und Mengen E_n mit $\nu(E_n) \leq 2^{-n}$ aber $|\mu(E_n)| \geq \varepsilon$. Insbesondere gilt also $|\mu|(E_n) \geq \varepsilon$. Setze

$$A_n := \bigcup_{i \geq n} E_i, \quad A := \bigcap_n A_n.$$

Dann gilt also $\nu(A_n) \leq \sum_{i \geq n} 2^{-i} = 2^{-n+1}$ und $A_n \supset A_{n+1}$.
Weiterhin gilt $\nu(A_1) \leq 2 < \infty$ und $|\mu|(A_1) \leq |\mu|(X) < \infty$ Damit folgt

$$\nu(A) = \lim_n \nu(A_n) = 0$$

und (wegen $A_n \supset E_n$)

$$|\mu|(A) = \lim_n |\mu|(A_n) \geq \varepsilon.$$

Damit ist also $|\mu|$ nicht absolut stetig bezueglich ν. Damit kann aber μ nicht absolut stetig sein bezueglich ν. (Sonst: Sei (E_n) eine Zerlegung einer ν Nullmenge. Dann gilt $\nu(E_n) = 0$ fuer jedes n. Damit folgt also $\mu(E_n) = 0$ fuer jedes n. Damit folgt $\sum_n |\mu(E_n)| = 0$ fuer die Zerlegung (E_n). Da dies fuer jede Zerlegung gilt, folgt $|\mu|(E) = 0$.) □

Wir brauchen noch einige weitere Konzepte.

Erinnerung. Wenn wir im folgenden von 'Maß' sprechen meinen wir ein komplexes oder positives Maß.

DEFINITION. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Maßraum.*
(a) Sei μ ein Maß auf X und A eine Teilmenge von X. Dann heißt μ auf A konzentriert, wenn

$$\mu(E) = \mu(A \cap E)$$

gilt fuer alle meßbaren E.
(b) Die Maße μ_1 und μ_2 auf X heißen gegenseitig singulaer,

$$\mu_1 \perp \mu_2,$$

wenn es disjunkte meßbare Menge A, B gibt, so daß μ_1 auf A konzentriert ist und μ_2 auf B konzentriert ist.

Bemerkung. Es ist μ auf A konzentiert genau dann wenn gilt $\mu(E) = 0$ fuer alle E mit $E \cap A = \emptyset$. Ist μ positiv, so ist dies aequivalent zu $\mu(A^c) = 0$. (Beweis: Zweite Aequivalenz ist klar. Zur ersten Aequivalenz: Ist μ auf A konzentriert, so gilt die Aussage sicher. Umgekehrt folgt aus der Aussage auch

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap A^c) = \mu(E \cap A).$$

PROPOSITION (Einfache Eigenschaften). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum. Sei ν ein positives Maß auf X und seien μ, μ_1, μ_2 komplexe Maße. Dann gilt:*

(a) *Ist μ auf A konzentriert, so auch $|\mu|$.*
(b) *Gilt $\mu_1 \perp \mu_2$, so gilt auch $|\mu_1| \perp |\mu_2|$.*
(c) *Gilt $\mu_1 \perp \nu$ und $\mu_2 \perp \nu$, so folgt $\mu_1 + \mu_2 \perp \nu$.*
(d) *Gilt $\mu_1 \ll \nu$ und $\mu_2 \ll \nu$, so folgt $\mu_1 + \mu_2 \ll \nu$.*
(e) *Gilt $\mu \ll \nu$, so folgt $|\mu| \ll \nu$.*
(f) *Gilt $\mu_1 \ll \nu$ und $\mu_2 \perp \nu$, so folgt $\mu_1 \perp \mu_2$.*
(g) *Gilt $\mu \ll \nu$ und $\mu \perp \nu$, so folgt $\mu = 0$.*

Beweis. (a) Sei $E \cap A = \emptyset$. Ist (E_n) ein Zerlegung von E, so gilt $E_n \cap A = \emptyset$. Damit folgt $\mu(E_n) = 0$ fuer alle n. Damit folgt $|\mu|(E) = 0$.

(b) Das folgt sofort aus (a) (und der Definition von $\perp$).

(c) Seien A_1 und B_1 disjunkte Mengen, so dass μ_1 auf A_1 konzentriert ist und ν auf B_1. Seien A_2 und B_2 disjunkte Mengen, so daß μ_2 auf A_2 konzentriert ist und ν auf B_2. Dann ist ν auf $B := B_1 \cap B_2$ konzentriert und $\mu_1 + \mu_2$ auf $A := A_1 \cup A_2$ und A und B sind disjunkt. Damit folgt (c).

(d) Das ist klar.

(e) Das wurde oben schon diskutiert: Sei (E_n) eine Zerlegung einer ν Nullmenge. Dann gilt $\nu(E_n) = 0$ fuer jedes n. Damit folgt also $\mu(E_n) = 0$ fuer jedes n. Damit folgt $\sum_n |\mu(E_n)| = 0$ fuer die Zerlegung (E_n). Da dies fuer jede Zerlegung gilt, folgt $|\mu|(E) = 0$.)

(f) Aufgrund von $\mu_2 \perp \nu$ existiert eine Menge A mit $\nu(A) = 0$ auf die μ_2 konzentriert ist. Wegen $\mu_1 \ll \nu$ gilt $\mu(E) = 0$ fuer jede Teilmenge E von A. Damit ist also μ_1 auf das Komplement von A konzentriert.

(g) Mit (f) folgt $\mu \perp \mu$. Das liefert leicht $\mu = 0$. $\square$

DEFINITION (σ-endlich). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum. Dann heißt ein positives Maß ν auf X σ-endlich, wenn es eine abzaehlbare Familie X_n, $n \in \mathbb{N}$ von meßbaren Mengen mit $\nu(X_n) < \infty$ und $X = \bigcup_n X_n$ gibt.*

Bemerkung. Die Mengen X_n, $n \in \mathbb{N}$, koennen ohne Einschraenkung als disjunkt vorausgesetzt werden. (Andernfalls kann man zu den Mengen $X_1' := X_1$, $X_n' := X_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} X_j$, uebergehen.) Alternativ koennen die Mengen X_n, $n \in \mathbb{N}$, auch ohne Einschraenkung aufsteigend gewaehlt werden. (Andernfalls kann man zu den Mengen $X_n' := \bigcup_{j=1}^{n} X_n$ uebergehen.) Allerdings ist es nicht moeglich, die Mengen X_n, $n \in \mathbb{N}$, gleichzeitig aufsteigend und disjunkt zu waehlen ;-)

Es koennen σ-endliche Maße im wesentlichen wie endliche Maße behandelt werden. Der Grund dafuer ist folgendes Lemma (vgl. dem Lemma folgende Bemerkung).

LEMMA. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum. Sei ν ein positives Maß auf X. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist ν σ-endlich.*
(ii) *Es gibt eine Funktion $w \in \mathcal{L}^1(X, \nu)$ mit $0 < w(x) < 1$ fuer alle $x \in X$.*

Bemerkung. Das Maß $w\nu$ ist endlich. Es hat aber trotzdem die gleichen Nullmengen wie ν. Daher kann es in einer ganzen Reihe von Fällen als Ersatz fuer ν dienen.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Ohne Einschraenkung seien die X_n mit $X = \bigcup_n X_n$ und $\nu(X_n) < \infty$ disjunkt. Setze nun w auf X_n konstant gleich

$$\frac{1}{2^n(1 + \nu(X_n))}.$$

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Setze $X_n := \{x : w(x) \geq \frac{1}{n}\}$. □

Ende der 7. Vorlesung

Exkurs - L^2: Definition; Vollstaendigkeit....

THEOREM (Lebesgue-Radon-Nikodym). $(X, \mathcal{A})$ *ein meßbarer Raum. Sei ν ein positives σ-endliches Maß und sei μ ein komplexes Maß.*
(a) Es existiert ein eindeutiges Paar (μ_{ac}, μ_{sing}) von komplexen Maßen mit

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}, \;\; \mu_{ac} \ll \nu, \;\; \text{und} \;\; \mu_{sing} \perp \nu.$$

Ist μ positive (und endlich), so sind es auch μ_{ac} und μ_{sing}.
(b) Es gibt ein (bis auf Nullmengen) eindeutig bestimmtes $h \in \mathcal{L}^1(X, \nu)$ mit

$$\mu_{ac}(E) = \int_E h d\nu$$

fuer alle meßbaren E.

Bemerkungen.

- Die Aussage von Teil (a) des Satzes ist als *Lebesgue-Zerlegung von μ bezueglich ν* bekannt. Es heißt μ_{ac} der (bzgl. ν) *absolut stetig Anteil von μ* und μ_{sing} der (bzgl. ν) *singulaere Anteil von μ.*
- Teil (b) des Satze ist als *Satz von Radon-Nikodym bekannt.* Wir werden noch eine Fassung fuer positive Maße kennenlenernen. Es heißt h die *Radon-Nikodym Ableitung* von μ_{ac} bezueglich ν. Man schreibt auch $h = d\mu_{ac}/d\nu$ und (wie schon oben eingefuehrt) $\mu_{ac} = hd\nu$.
- Teil (b) des Satzes ist die Umkehrung zu von uns weiter oben besprochenen Aussagen.

Beweis. Wir zeigen zunaechst die *Eindeutigkeit* der Lebesgue-Zerlegung. Dabei verwenden wir die einfachen Eigenschaften aus der vorangehenden Proposition: Sei μ'_{ac}, μ'_{sing} eine weitere Zerlegung. Dann gilt

$$\mu'_{ac} - \mu_{ac} = \mu_{sing} - \mu'_{sing}$$

sowie

$$\mu_{ac}^{'} - \mu_{ac} \ll \nu, \;\; \mu_{sing} - \mu_{sing}^{'} \perp \mu.$$

Damit folgt $\mu_{ac}^{'} - \mu_{ac} = 0 = \mu_{sing} - \mu_{sing}^{'}$. Das zeigt die Eindeutigkeit.

Wir zeigen nun die *Existenz* der Lebesgue-Zerlegung und von h. (Damit beweisen wir die verbliebenen Teile von (a) und (b) in einem.)

Ohne Einschraenkung sei μ ein positives beschraenktes Maß. (Sonst: Zerlegung in Realteil und Imaginaerteil und weitere Zerlegung dieser Teile in positiv und negative Anteile und getrennte Behandlung dieser Teile).
Sei w zu ν wie im vorangehenden Lemma gewaehlt. Sei das Maß ϕ definiert durch $\phi = \mu + w\nu$, d.h.

$$\phi(E) = \mu(E) + \int w 1_E d\nu.$$

Dann gilt also

$$(+) \quad \int f d\phi = \int f d\mu + \int f w d\nu$$

fuer alle nichtnegativen meßbaren f sowie fuer alle $f \in \mathcal{L}^1(X, \phi)$. (Aussage folgt zunaechst fuer $f = 1_E$, anschliessend fuer einfache Funktionen und dann nach Grenzuebergang fuer nichtnegative Funktionen und dann nach entsprechender Zerlegung fuer $\mathcal{L}^1$ Funktionen). Wir betrachten nun das lineare Funktional

$$L^2(\phi) \longrightarrow \mathbb{C}, \;\; f \mapsto \int f d\mu.$$

Wir machen uns zunaechst klar, daß dieses Funktional wohldefiniert ist: Wegen $\mu \leq \phi$ ist f tatsaechlich μ fast ueberall eindeutig bestimmt. Wegen $|f| \leq 1 + |f|^2$ und der Endlichkeit des Maßes μ gehoert f dann zu $\mathcal{L}^1(X, \mu)$. Damit existiert $\int f d\mu$. Wir zeigen nun, daß dieses Funktional stetig ist: Fuer $f \in L^2(\phi)$ erhalten wir

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu \leq \int |f| d\phi \leq \left(\int |f|^2 d\phi \right)^{1/2} \phi(X)^{1/2}.$$

Wegen $\phi(X) < \infty$ ist also die Abbildung

$$L^2(\phi) \longrightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \int f d\mu,$$

ein stetiges Funktional. Damit existiert also nach dem Lemma von Riesz ein $g \in L^2(\phi)$ mit

$$(*) \quad \int f d\mu = \int f g d\phi.$$

Fuer spaetere Verwendung zeigen wir nun kurz, daß $0 \leq g(x) \leq 1$ fuer ϕ fast alle x gilt: Es gilt nach $(*)$ mit $f = 1_E$ fuer jedes meßbare E mit $\phi(E) > 0$

$$0 \leq \frac{1}{\phi(E)} \int_E g d\phi = \frac{\nu(E)}{\phi(E)} \leq 1.$$

(Hier wird im letzten Schritt $0 \leq \nu \leq \phi$ genutzt.) Damit folgt dann $0 \leq g \leq 1$ ϕ fast ueberall (vgl. dem Beweis folgende Bemerkung). Nach Abaendern von g auf einer Nullmenge koennen wir dann

$$0 \leq g(x) \leq 1$$

fuer alle $x \in X$ annehmen, ohne daß $(*)$ seine Gueltigkeit verliert.

Mit der Definition von ϕ erhalten wir aus $(*)$ und $(+)$ dann

$$\int f d\mu = \int fg d\mu + \int fgw d\nu.$$

(Beachte, daß fg zu $\mathcal{L}^1(X, \phi)$ gehoert.) Durch Substraktion ergibt sich dann

$$\int f(1-g) d\mu = \int fgw d\nu.$$

(Aus dieser Gleichung kann man auch direkt schließen, dass g fast ueberall nur Werte in $[0,1]$ annimmt.) Damit gilt also

$$(**) \;\; (1-g)\mu = gw\nu$$

als Gleichheit von (aufgrund von $0 \leq g \leq 1$) positiven Maßen. Das ist (fast schon) die gewuenschte Zerlegung. Hier sind die Details: Wir setzen

$$A := \{x : 0 \leq g(x) < 1\}, \; B := \{x : g(x) = 1\}$$

und definieren

$$\mu_{ac}(E) := \mu(A \cap E), \;\; \mu_{sing}(E) := \mu(B \cap E).$$

Dann gilt (wegen $0 \leq g \leq 1$) also

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}.$$

Weiterhin folgt nach Einsetzen von $f = 1_B$ und Nutzen von $g = 1$ auf B aus $(**)$ sofort

$$0 = \int_B w d\nu.$$

Wegen $w > 0$ folgt also $\nu(B) = 0$. Da μ_{sing} offenbar auf B konzentriert ist gilt also

$$\mu_{sing} \perp \nu.$$

Außerdem folgt aus $(**)$ mit $h = 1_A \frac{gw}{1-g} \geq 0$ sofort

$$\mu_{ac} = 1_A \mu = \frac{1_A}{1-g}(1-g)\mu \overset{(**)}{=} h\nu.$$

Setzt man $E = X$, so folgt $h \in \mathcal{L}^1$. Damit ist (b) beweisen. Damit folgt dann auch der noch verbliebene Teil von (a). $\square$

Ende der 8. Vorlesung.

Bemerkung. (Uebung) Sei ν ein positives Maß, $u \in \mathcal{L}^1(\nu)$ und $S \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen mit

$$\frac{1}{\nu(E)} \int_E h d\nu \in S$$

fuer alle meßbaren E mit $\nu(E) > 0$. Dann nimmt h fast sicher nur Werte in S an. (Bew. Betrachte eine abgeschlossene Kugel mit positivem Radius im Komplement des abgeschlossenen (!) S und betrachte ihr Urbild E unter h. Wenn E positives Maß hat, so folgt mithilfe der Dreiecksungleichung, dass auch $\frac{1}{\nu(E)} \int_E h d\nu$ in in der Kugel liegt. Das ist ein Widerspruch.)

Bemerkung. Die Vollstaendigkeit von $L^2(\phi)$ ist wesentlich fuer den Beweis. Sie liefert die Existenz von g.

FOLGERUNG (Radon-Nikodym). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Maßraum und seien ν und μ positive σ-endliche Maße mit $\mu \ll \nu$. Dann existiert ein nichtnegatives meßbares h mit $\mu = h\nu$.*

Bemerkung. Das angegebene h gehoert (offenbar) genau dann zu $\mathcal{L}^1$, wenn μ endlich ist.

Beweis. Seien meßbare paarweise disjunkte Mengen X_n mit $\nu(X_n) < \infty$ und $\mu(X_n) < \infty$ und $X = \bigcup_n X_n$ gewaehlt. (Die Existenz solcher Mengen ist nicht schwer zu sehen: Waehle Y_n zu ν und Z_n zu μ. Ohne Einschraenkung seien Y_n und Z_n aufsteigend. Setze nun $X_n^{'} := Y_n \cap Z_n$ und betrachte $X_n := X_n^{'} \setminus X_{n-1}^{'}$.)
Dann kann man auf jedem einzelnen X_n das vorangehende Theorem anwenden: Sei μ_n die Einschraenkung von μ auf X_n d.h.

$$\mu_n(E) = \mu(X_n \cap E).$$

Dann liefert Teil (a) des vorigen Theorems $\mu_n = \mu_{ac} + \mu_{sing}$ und nach Voraussetzung ist $\mu_{sing} = 0$. Damit liefert dann Teil (b) eine Funktion $h_n \geq 0$ auf X_n mit

$$\mu_n = h_n \nu.$$

Zusammensetzen der h_n liefert dann mit $h = \sum_n h_n$ die gewuenschte Aussage gemaeß

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \cap E) \\
(X_n \text{ paarweise disjunkt}) \quad &= \sum_n \mu(X_n \cap E) \\
&= \sum \mu_n(E) \\
&= \sum_n \int 1_E h_n d\nu \\
(\text{Monotone Konvergenz}) \quad &= \int h 1_E d\nu.
\end{aligned}$$

Das ist die gewuenschte Aussage. □

Bemerkung. Die Voraussetzung der σ-Endlichkeit von ν ist notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt: $\mu = \lambda$ Lebesguemaß auf $[0, 1]$ und ν das Zaehlmaß auf $[0, 1]$ (das also jedem Punkt aus $[0, 1]$ das Maß 1 zuordnet). Dann gilt $\mu \ll \nu$, aber es gibt kein h mit $\mu = h\nu$.

Wir kommen nun zu einigen Folgerungen aus dem Satz von Radon-Nikodym.

THEOREM (Polarzerlegung eines Maßes). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und μ ein komplexes Maß auf X. Dann existiert eine Funktion $h \in \mathcal{L}^1(X, |\mu|)$ mit $|h(x)| = 1$ fuer alle $x \in X$ und*

$$\mu = h|\mu|.$$

Diese Funktion ist $|\mu|$ fast ueberall eindeutig.

Bemerkung. Die Zerlegung $\mu = h|\mu|$ heißt manchmal Polarzerlegung. Es ist $|\mu|$ der Betrag von μ und h die 'Phase'. (Vgl. Polarzerlegung $z = re^{i\varphi}$ einer komplexen Zahl.)

Beweis. Eindeutigkeit: Seien h_1 und h_2 zwei Funktionen mit den angegebenen Eigenschaften. Dann gilt also fuer jede meßbare Menge E

$$(*) \quad \int h_1 1_E d|\mu| = \mu(E) = \int h_2 1_E d|\mu|.$$

Nach Uebergang zu Real- und Imaginaerteil, koennen wir o.E. annehmen, daß h_1 und h_2 reell sind. Dann sieht man aus $(*)$ mit $E := \{x : h_1(x) - h_2(x) > 0\}$)bzw. $E := \{x : h_1(x) - h_2(x) < 0\}$) leicht, daß $h_1 = h_2$ $|\mu|$ fast ueberall gilt.

Existenz: Aus dem Satz von Radon-Nikodym, folgt die Existenz eines $h \in \mathcal{L}^1(X, |\mu|)$ mit der charakteristischen Eigenschaft $\mu = hd|\mu|$. Wir zeigen $|h| = 1$ fast ueberall:
Sei $r > 0$ und $A_r := \{x : |h(x)| < r\}$. Sei (E_n) eine Zerlegung von A_r. Dann gilt

$$\sum_n |\mu(E_n)| = \sum_n \left| \int_{E_n} hd|\mu| \right| \leq \sum_n r|\mu|(E_n) = r|\mu|(A_r).$$

Dabei verwenden wir die charakteristische Eigenschaft von h im ersten Schritt und die Dreiecksungleichung und die Definition von A_r im zweiten Schritt. Da die Zerlegung beliebig gewaehlt werden konnte, folgt

$$|\mu|(A_r) \leq r|\mu|(A_r).$$

Fuer $r < 1$ liefert dies $|\mu(A_r)| = 0$. Das liefert $h \geq 1$ $|\mu|$ fast ueberall. Auf der anderen Seite gilt fuer alle meßbaren E mit $|\mu(E)| > 0$ nach der charakteristitschen Eigenschaft

$$\left| \frac{1}{|\mu|(E)} \int_E hd|\mu| \right| = \frac{|\mu(E)|}{|\mu|(E)} \leq 1.$$

Daraus folgt leicht (vgl. eine vorangehende Bemerkung) $|h| \leq 1$ $|\mu|$-fast ueberall. Insgesamt folgt also $|h| = 1$ $|\mu|$-fast ueberall. Durch Umdefinieren von h auf einer Nullmengen folgt dann $|h| = 1$ ueberall. □

Bemerkung. Die Zerlegung $\mu = h|\mu|$ erlaubt es Integration bzgl. beliebiger komplexer Maße zu definieren durch

$$\int f d\mu = \int fhd|\mu|$$

fuer alle $f \in \mathcal{L}^1(X, |\mu|)$. Mit dieser Definition laeßt sich dann insbesondere ein Satz von Riesz zur Darstellung beliebiger stetiger Funktionale auf $C_0(X)$ fuer lokalkompakte Hausdorffraeume X zeigen. Wir verzichten hier auf die Details.

Folgerung (Konsistenz der Polarzerlegung). *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und ν ein postives Maß auf X und $g \in \mathcal{L}^1(X, \nu)$ und $\mu = g\nu$ das zugehoerige komplexe Maß. Dann gilt $|\mu| = |g|\nu$ und, insbesondere, also auch $\mu = sgn(g)\ |\mu|$.*

Bemerkung. Die Folgerung besagt gerade, dass fuer das Maß $\mu = g\nu$ der Betrag von μ gerade dem Betrag von $|g|$ entspricht und die Phase von μ gerade der Phase von g.

Beweis. Sei h die (eindeutige) Funktion mit $|h| = 1$ und $\mu = hd|\mu|$. Nach Voraussetzung gilt

$$\mu = g\nu.$$

Damit folgt also

$$h|\mu| = g\nu$$

und damit

$$|\mu| = \overline{h}g\nu.$$

Da $|\mu|$ ein positives Maß ist, folgt $\overline{h}g \geq 0$ fuer ν fast alle Punkte. Damit folgt (wegen $|h| = 1$) dann

$$\overline{h}g = |\overline{h}g| = |g|.$$

Das liefert die gewuenschte Aussage. □

THEOREM (Hahn-Zerlegung). *Sei μ ein signiertes (d.h. komplexes reellwertiges) Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Dann gibt es meßbare Menge A, B mit*

$$A \cap B = \emptyset, \;\; A \cup B = X$$

und

$$\mu^+(E) = \mu(A \cap E), \;\; \mu^-(E) = -\mu(B \cap E).$$

Beweis. Es gilt $\mu = h|\mu|$ mit $|h| = 1$. Da h reell ist, nimmt es also nur die Werte 1 und -1 an. Wir definieren

$$A := \{x : h(x) = 1\} \text{ und } B := \{x : h(x) = -1\}.$$

Es gilt nun

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \text{ sowie } \frac{1}{2}(1 + h) = 1_A = 1_A.$$

Damit folgt also

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2}\int_E (1 + h)d|\mu| = \int_E 1_A hd|\mu| = \int\int_{E\cap A} hd|\mu| = \mu(E \cap A).$$

Entsprechend kann man fuer μ^- schliessen. □

Bemerkung.

- Es gilt dann also $\mu^+ = 1_A|\mu|$ und $\mu^- = 1_B|\mu|$. Das Paar (A, B) heißt die *Hahn-Zerlegung* von X bgz. μ.
- Es gilt $\mu = \mu^+ - \mu^-$ mit den positiven Maßen μ^+, μ^-. Diese Zerlegung ist nicht eindeutig. Denn man kann natuerlich zu $\mu^\pm$ ein beliebiges positives Maß ϱ addieren. Tatsaechlich ist dies die einzige Freiheit, die man hat: Gilt $\mu = \nu^+ - \nu^-$, so gibt es ein positives Maß ϱ mit $\nu^\pm = \mu^\pm + \varrho$. Es hat also die Zerlegung in $\mu^\pm$ eine Minimalitaetseigenschaft. (Bew. Es gilt mit A wie im Theorem

$$\begin{aligned}\mu^+(E) &= \mu(A\cap E)\\ &= \nu^+(A\cap E) - \nu^-(A\cap E)\\ &\leq \nu^+(A\cap E)\\ &\leq \nu^+(E).\end{aligned}$$

Damit folgt also, daß $\varrho(E) := \nu^+ - \mu^+$ ein positives Maß ist.)

Ende der 9. Vorlesung

7. Der Lebesguesche Differentiationssatz

In diesem Abschnitt betrachten wir den Euklidischen Raum $\mathbb{R}^N$ mit dem Lebesguemaß λ. Es wird um Maße der Form

$$\mu = f\lambda$$

mit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ gehen. Das Ziel ist es fuer solche Maße μ die Funktion f, d.h. die Radon-Nikodym Ableitung von μ bzgl. λ, als Grenzwert auszurechnen via

$$f(x) = D\mu(x) := \lim_{r\to 0}\frac{\mu(U_r(x))}{\lambda(U_r(x))}.$$

Es wird sich herausstellen, daß dies fuer viele x tatsaechlich moeglich ist. Wir brauchen dazu einige Vorbereitungen.

Zur Einstimmung beginnen wir mit folgender Aussage (deren Beweis wir als Uebung lassen).

Saetzchen. Sei μ ein komplexes Maß auf $\mathbb{R}$ und $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ definiert durch $f(x) = \mu((-\infty, x))$. Dann sind fuer $x\in\mathbb{R}$ und $c\in\mathbb{C}$ die folgenden beiden Aussagen aequivalent:

- Es ist f differenzierbar in x mit $f'(x) = c$.
- Fuer alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit
$$\left|\frac{\mu(I)}{\lambda(I)} - c\right| < \varepsilon$$
fuer alle Intervalle I um x mit $0 < |I| < \delta$.

(Der Beweis nutzt die folgenden beiden Beobachtungen:

- Fuer $z_1 < z_2$ und $I = [z_1, z_2)$ gilt $\mu(I) = f(z_2) - f(z_1)$.
- Fuer $z_1 < x < z_2$ gilt
$$\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} = \frac{f(z_2)-f(x)}{z_2-x}\,\frac{z_2-x}{z_2-z_1} + \frac{f(x)-f(z_1)}{x-z_1}\,\frac{x-z_1}{z_2-z_1}.$$

Damit folgt die Aequivalenz einfach.)

Wir fuehren nun die noetige Notation ein, die wir im Rest des Abschnittes verwenden werden.

Notation. Wir setzen

$$U_r(x) := \{y\in\mathbb{R}^N : |y-x| < r\}.$$

Weiterhin setzen wir fuer ein komplexes Maß μ auf $\mathbb{R}^N$ und $r > 0$ die Quotientenfunktion

$$(Q_r\mu)(x) := \frac{\mu(U_r(x))}{\lambda(U_r(x))}$$

sowie (falls fuer $x \in \mathbb{R}^N$ der Grenzwert existiert)

$$D\mu(x) = \lim_{r\to 0}(Q_r\mu)(x).$$

Das wesentliche Hilfsmittel bei der Untersuchung von Q_r wird die Maximalfunktion sein: Fuer ein positives Maß μ definiert man die Maximalfunktion durch

$$(M\mu)(x) := \sup_{0<r<\infty} (Q_r\mu)(x)$$

und fuer ein komplexes Maß μ definiert man

$$(M\mu)(x) := (M|\mu|)(x).$$

Bemerkung. Es ist plausibel, daß die Maximalfunktion bei der Untersuchung der Q_r eine wichtige Rolle spielt, da sie simultan alle r erfaßt. Auch beachte man, dass in gewisser Weise nur die kleinen Werte von r interessant sind, da fuer die großen Werte von r die Werte $\mu(U_r(x))$ durch $|\mu|(\mathbb{R}^N)$ beschraenkt sind, waehrend $\lambda(U_r(x))$ gegen ∞ konvergiert.

PROPOSITION (Unterhalbstetigkeit der Maximalfunktion). *Es ist $M\mu$ unterhalbstetig (d.h. $\{x : M\mu(x) > s\}$ ist fuer jedes $s \in \mathbb{R}$ offen) und insbesondere ist $M\mu$ meßbar.*

Beweis. Sei ohne Einschraenkung μ ein positives Maß und sei

$$U := \{x : M\mu(x) > s\}$$

fuer ein $s \in \mathbb{R}$. Zu zeigen: U ist offen.

Sei $x \in U$ beliebig. Dann existiert also ein $r > 0$ und $t > s$ mit $\mu(U_r(x)) = t\lambda(U_r(x))$. Fuer $\delta > 0$ genuegend klein und $y \in U_\delta(x)$ gilt dann:

- $U_{r+\delta}(y) \supset U_r(x)$ (das gilt sogar fuer alle $\delta > 0$).
- $\lambda(U_{r+\delta}(y) < \frac{t}{s}\lambda(U_r(x))$ (das gilt fuer genuegend kleine $\delta > 0$).

Damit folgt dann

$$\begin{aligned} \mu(U_{r+\delta}(y) &\geq \mu(U_r(x)) \\ &= t\lambda(U_r(x)) \\ &> s\lambda(U_{r+\delta}(y)). \end{aligned}$$

(Hier wird die erste Eigenschaft von δ in der ersten Ungleichung genutzt und die zweite Eigenschaft im letzten Schritt.) Insgesamt erhaelt man also fuer alle $y \in U_\delta(x)$

$$\mu(U_{r+\delta}(y)) > s\lambda(U_{r+\delta}(y))$$

und damit $y \in U$. □

Bemerkung. Der Beweis nutzt eine Stetigkeitseigenschaft des Lebesguemaßes und die Monotonie eines jeden Maßes.

Wir kommen nun zu einem wesentlichen Hilfsmittel in diesem Abschnitt (und in anderen Kontexten).

LEMMA. *(Ueberdeckungslemma) Sei W die Vereinigung von Kugeln $U_{r_i}(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^N$. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $S \subset \{1, \ldots, n\}$ mit folgenden Eigenschaften:*

- *Die $U_{r_i}(x_i)$, $i \in S$, sind paarweise disjunkt.*
- *Es gilt $W \subset \bigcup_{i \in S} U_{3r_i}(x_i)$.*
- $\lambda(W) \leq 3^N \sum_{i \in S} \lambda(U_{r_i}(x_i))$.

Bemerkung. Entscheidend sind die beiden ersten Punkte. Diese gelten fuer allgemeine metrische Raeume. Der dritte Punkt folgt aus den beiden ersten Punkten. Er nutzt eine Skalierungseigenschaft des Lebesguemaßes. Entsprechend gilt das Lemma (und damit die meisten der folgenden Aussagen dieses Abschnittes) in beliebigen metrischen Raeumen, wenn das zugrundeliegende Maß eine entsprechende Skalierungseigenschaft hat. Speziell braucht man, daß das Volumen von Kugeln mit dem dreifachen Radius durch eine Konstante mal das Volumen der urspruenglichen Kugeln abgeschaetzt werden kann. Natuerlich ist das erfuellt, wenn das Volumen von Kugeln mit dem doppelten Radius durch eine Konstante mal das Volumen der urspruenglichen Kugeln abgeschaetzt werden kann. Das ist unter dem Namen 'Volumenverdoppelung' bekannt.

Beweis. Der dritte Punkt folgt aus dem zweiten Punkt und einfachen Eigenschaften des Lebesguemaßes. Wir zeigen nun Existenz eines S, das die beiden ersten Punkte erfuellt. Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir

$$U_j := U_{r_j}(x_j)$$

fuer $j = 1, \ldots, n$.

Wir sortieren zunaechst die Kugeln nach Groeße um, so daß gilt

$$r_1 \geq r_2 \geq .... \geq r_n.$$

Wir setzen $i_1 := 1$. (Die Menge S wird als $\{i_1, \ldots\}$ gegeben werden.) Wir entfernen alle $j > i_1$ mit $U_j \cap U_{i_1} \neq \emptyset$.
Beachte:

- Alle noch verbliebenen Kugeln sind disjunkt zu U_{i_1} (nach Konstruktion).
- Jede der entfernten Kugeln U_j ist in $U_{3r_{i_1}}(x_{i_1})$ enthalten (da $r_{i_1} \geq r_j$ und $U_j \cap U_{i_1} \neq \emptyset$).

Wenn noch Kugeln uebrig sind, setzen wir i_2 als den kleinsten noch uebrigen Index. Dann gilt also inbesondere $U_{i_1} \cap U_{i_2} = \emptyset$. Wir entfernen nun alle Kugeln (mit Index $j > i_2$) mit

$$U_j \cap U_{i_2} \neq \emptyset.$$

Beachte:

- Alle noch verbliebenen Kugeln sind disjunkt zu U_{i_2} (nach Konstruktion) und natuerlich weiterhin auch zu U_{i_1}.
- Jede der entfernten Kugeln U_j ist in $U_{3r_{i_2}}(x_{i_2})$ enthalten (da $r_{i_2} \geq r_j$ und $U_j \cap U_{i_2} \neq \emptyset$).

Wir iterieren nun diesen Schritt immer wieder solange noch Kugeln ueberig sind. Da es nur endlich viele Kugeln gibt, endet dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten. Wir setzen dann

$$S := \{i_1, ...\}.$$

Das beendet den Beweis. □

Als Konsequenz aus dem Ueberdeckungslemma koennen wir nun folgendes Maximaltheorem beweisen.

Theorem (Maximaltheorem). *Sei μ ein komplexes Maß in $\mathbb{R}^N$. Dann gilt fuer jedes $s > 0$*

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^N : M\mu(x) > s\}) \leq 3^N |\mu|(X)\frac{1}{s}.$$

Bemerkung. Das Theorem gibt eine praezise Information, wie die Maximalfunktion fuer grosse s klein wird. Dabei geht von μ nur die Gesamtmaße ein und es spielt ansonsten nur die lediglich dimensionsabhaengige Konstante 3^N eine Rolle. In diesem Sinne ist das Theorem sehr universell.

Beweis. Setze $U := \{x : M\mu(x) > s\}$. Dann ist U offen (s.o.). Sei $K \subset U$ eine beliebige kompakte Menge. Zu jedem $x \in K$ existiert dann eine Kugel U_x (mit Mittelpunkt x) und

$$(*) \quad |\mu|(U_x) > s\lambda(U_x).$$

Da K kompakt ist, kann man es mit endlich vielen solcher Kugeln ueberdecken. Nach dem vorigen Lemma koennen aus diesen endliche vielen Kugelen, dann Kugeln $U_1, \ldots, U_k$ gewaehlt werden mit folgenden beiden Eigenschaften:

- Die U_j, $j = 1, \ldots, k$, sind paarweise disjunkt.
- $\lambda(K) \leq 3^N \sum_{j=1}^k \lambda(U_j)$.

Damit gilt also:

$$\begin{array}{rcl} \lambda(K) & \leq & 3^N \sum_{j=1}^k \lambda(U_j) \\ (*) & \leq & 3^N \sum_{j=1}^k \frac{|\mu|(U_j)}{s} \\ & = & \frac{3^N}{s} \sum_{j=1}^k |\mu|(U_j) \\ (U_j \text{ disjunkt}) & = & \frac{3^N}{s} |\mu|(\bigcup_{j=1}^k U_j) \\ & \leq & \frac{3^N}{s} |\mu|(\mathbb{R}^N). \end{array}$$

(Es ist $|\mu|(\mathbb{R}^N)$ endlich, da es sich um ein komplexes Maß handelt). Wir waehlen nun kompakte Teilmengen K_n von U mit

$$K_n \subset K_{n+1} \text{ und } \bigcup_n K_n = U.$$

(Zum Beispiel:

$$K_n := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq n\} \cap \{y \in U : dist(y, U^c) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Das ist kompakt als Schnitt einer kompakten Menge mit einer abgeschlossenen Menge und die Vereinigung dieser K_n ist U, da U offen ist.) Dann gilt aufgrund von uns schon bekannte Saetzen zur 'Stetigkeit' von Maßen

$$\lambda(U) = \lim_n \lambda(K_n) \leq \frac{3^N}{s}|\mu|(\mathbb{R}^N).$$

Das ist die gewuenschte Aussage. □

Ende der 10. Vorlesung

Wir kommen nun zur Anwendung auf Maße der Form $\mu = f\lambda$ mit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Wir definieren fuer $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ $Mf := M(f\lambda)$ d.h.

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f(y)| d\lambda(y)$$

fuer $x \in \mathbb{R}^N$. Dann gilt also

$$Mf = M|f\lambda| = M|f|\lambda.$$

(Hier folgt die erste Gleichung nach Definition von M fuer komplexe Maße und die zweite folgt aufgrund des oben gezeigten $|f\lambda| = |f|\lambda$.) K
Weiterhin gilt dann offenbar fuer die Gesamtmaße der totalen Variation von $\mu = f\lambda$

$$|\mu|(\mathbb{R}^N) = (|f|\lambda)(\mathbb{R}^N) = \int_{\mathbb{R}^N} |f| d\lambda = \|f\|_1.$$

FOLGERUNG. *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Dann gilt fuer $s > 0$*

$$\lambda(\{x : Mf(x) > s\}) \leq \frac{3^N}{s}\|f\|_1.$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem vorangehenden Theorem. □

Bemerkung.

- Eine meßbare Funktion $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt eine schwache L^1 - Funktion, wenn gilt

$$\lambda(\{x : |g(x)| > s\}) \leq \frac{constant}{s}$$

  fuer alle $s > 0$. Damit besagt die Folgerung also, daß Mf eine schwache L^1 - Funktion ist fuer jedes $f \in \mathcal{L}^1$.
- Es ist jede $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ Funktion f eine schwache L^1 - Funktion. Denn mit $E_s := \{x : |f(x)| > s\}$ gilt offenbar $s1_{E_s} \leq |f|$ und damit

$$s\lambda(E_s) = \int s1_{E_s} d\lambda \leq \int_{E_s} |f| d\lambda \leq \int |f| d\lambda = \|f\|_1.$$

Es gibt schwach - L^1 - Funktionen, die nicht in L^1 sind. Dazu gehoert zum Beispiel (fuer $N = 1$) die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 1/|x| \text{ fuer } x \neq 0$$

und $f(0) = 0$. Dann gilt

$$E_s = \{x : |f(x)| \geq s\} = [-\frac{1}{s}, \frac{1}{s}]$$

und damit

$$\lambda(E_s) = \frac{2}{s}.$$

Bonusmaterial

- Fuer $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ mit $f \neq 0$ ist die Funktion Mf keine $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ Funktion. (Uebung. Idee: Verschwindet f zum Beispiel auf der 1 Kugel um den Ursprung nicht identisch, so folgt $Mf(x) \geq \frac{C}{|x|^N}$ fuer grosse x. Damit ist Mf nicht integrierbar.)

Bonusmaterial

Definition (Lebesguepunkt). *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ gegeben. Ein $x \in \mathbb{R}^N$ mit*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f(y) - f(x)| d\lambda = 0$$

heißt Lebesguepunkt von f.

Bemerkungen.

- Jeder Stetigkeitspunkt von f ist ein Lebesguepunkt (wie man leicht sieht).
- Wenn f nirgends stetig ist, ist - a priori - gar nicht klar, daß es Lebesguepunkte gibt.
- In jedem Lebesguepunkt x existiert (aufgrund der Dreiecksungleichgung) die Ableitung $D\mu(x)$ von $\mu = f\lambda$ und stimmt mit $f(x)$ ueberein.

Theorem (Fast jeder Punkt ist Lebesguepunkt). *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Dann ist λ - fast jedes x ein Lebesguepunkt (von f).*

Beweis. Fuer $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^N$ definieren wir

$$T_r f(x) := \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f - f(x)| d\lambda.$$

Weiterhin sei

$$Tf := \limsup_{r\to 0} T_r f.$$

Wir zeigen $Tf(x) = 0$ fuer λ - fast alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Idee. Wir zerlegen $f = g + h$ in $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ und h mit $\|h\|_1$ klein. Dann gilt $Tf \leq Tg + Th$ und $Tg = 0$ (da g stetig ist) und Th klein (da h klein).

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da $C_c(\mathbb{R}^N)$ dicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ ist existiert ein $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$, so daß fuer $h = f - g$ gilt

$$\|h\|_1 \leq \frac{1}{n}.$$

Nach Konstruktion gilt $f = g + h$. Damit folgt (nach einer kleiner Rechnung)

$$Tf \leq Tg + Th.$$

Wir behandeln nun Tg und Th getrennt:
Aufgrund der Stetigkeit von g gilt $Tg = 0$. Fuer Th folgt aus

$$T_r h(x) = \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |h - h(x)| d\lambda \leq \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |h| d\lambda + |h(x)|$$

dann nach Bilden von $r \to 0$

$$Th(x) \leq Mh(x) + |h(x)|.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$Tf(x) \leq Mh(x) + |h|(x).$$

Aus dieser Abschaetzung folgt nun fuer jedes $s > 0$

$$(*) \quad \{x : Tf(x) > 2s\} \subset \{x : Mh(x) > s\} \cup \{x : |h(x)| > s\} =: E(s,n).$$

(Beachte, daß die rechte Seite ueber h tatsaechlich von n abhaengt.) Nach der Folgerung und da h in $\mathcal{L}^1$ ist, koennen wir nun das Maß der rechten Seite abschaetzen zu

$$\lambda(E(s,n)) \leq (3^N + 1)\|h\|_1 \frac{1}{s} = (3^N + 1)\frac{1}{sn}.$$

Nun ist die linke Seite von $(*)$ unabhaengig von n damit gilt also

$$\{x : Tf(x) > 2s\} \subset \bigcap_n E(s,n).$$

Aufgrund der vorangehenden Abschaetzung hat aber der Schnitt auf der rechten Seite das Lebesguemaß Null. Damit ist also fuer jedes s die Menge

$$\{x : Tf(x) > 2s\}$$

in einer Lebesgue Nullmenge enthalten. Damit ist dann die Menge $\{x : Tf(x) > 0\}$ in einer Lebesgue Nullmenge enthalten. Da diese Menge offenbar meßbar ist, ist sie selber eine Lebesgue Nullmenge und das Theorem ist bewiesen. $\square$

Wir ziehen nun einige Folgerungen aus dem Theorem. Man mache sich klar, daß Menge der x von vollem Lebesguemaß, um die es jeweils geht, immer die Lebesguepunkte umfaßt. Wir beginnnen mit zwei Folgerungen, die auch unter dem Namen 'Lebesguescher Differentiationssatz' bekannt sind.

Folgerung. *(Lebesguescher Differentiationssatz) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ und $\mu = f\lambda$. Dann existiert fuer λ - fast alle $x \in \mathbb{R}^N$ die Ableitung*

$$D\mu(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f d\lambda$$

und stimmt mit $f(x)$ ueberein.

Beweis. In jedem Lebesguepunkt x gilt

$$\left| \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f d\lambda - f(x) \right| \leq \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f - f(x)| d\lambda \to 0, r \to 0.$$

Aus dem vorigen Theorem folgt nun die gewuenschte Behauptung. $\square$

Folgerung. *(Lebesguescher Differentiationssatz - Variante) Sei μ ein komplexes Maß auf $\mathbb{R}^N$ mit $\mu \ll \lambda$. Dann existiert*

$$D\mu(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(U_r(x))}{\lambda(U_r(x))}$$

fuer λ fast alle $x \in \mathbb{R}^N$ und es gilt

$$\mu = (D\mu)\lambda.$$

Beweis. Aufgrund von $\mu \ll \lambda$ gilt nach dem Satz von Radon-Nikodym $\mu = f\lambda$ mit einem $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Nun folgt die Aussage leicht aus der vorangehenden Folgerung. □

Bisher haben wir beim Bilden von $D\mu$ uns auf den Fall von Grenzwertbildung entlang von Kugeln beschraenkt. Es lassen sich obige Aussagen aber direkt auf etwas allgemeinere Folgen von Mengen ausweiten.

Definition. *(f. z. Folgen) Sei $x \in \mathbb{R}^N$. Eine Folge E_n von meßbaren Mengen in $\mathbb{R}^N$ wird bei x freundlich zusammenziehend (f.z.) genannt, wenn es $\alpha > 0$ und $r_n \to 0$ gibt mit*

- $E_n \subset U_{r_n}(x)$,
- $\lambda(E_n) \geq \alpha\lambda(U_{r_n}(x))$.

Bemerkungen.

- Im englischen spricht man von *nicely shrinking sets*.
- Die Bedingung bedeutet gerade, daß die E_n einen erheblichen Teil von sich auf x zusammenziehenden Kugeln ausmachen. Damit sind sie in gewisser Weise 'aequivalent' zu solchen Kugeln.
- Es wird nicht gefordert, daß x zu E_n oder zu $\overline{E_n}$ gehoert.

Theorem (Ableitung eines absolut stetigen Maßes). *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ und sei zu jedem $x \in \mathbb{R}^N$ eine freundlich zusammenziehende Folge $E_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, gewaehlt. Dann gilt fuer λ - fast alle $x \in \mathbb{R}^N$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(E_n(x))} \int_{E_n(x)} f d\lambda = f(x).$$

Beweis. In jedem Lebesguepunkt x gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda(E_n(x))} \int_{E_n(x)} |f - f(x)| d\lambda &\leq \frac{1}{\lambda(E_n(x))} \int_{U_{r_n}(x)} |f - f(x)| d\lambda \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\lambda(U_{r_n}(x))} \int_{U_{r_n}(x)} |f - f(x)| d\lambda \\
&\to 0, n \to \infty.
\end{aligned}$$

Hier haben wir in den beiden ersten Abschaetzungen die beiden charakteristischen Eigenschaften eine fz Folge benutzt und im letzten Schritt, daß x ein Lebesguepunkt ist. Mit der Dreiecksungleichung folgt dann leicht die Aussage des Theorems. □

Ende der 11. Vorlesung

THEOREM (Ableitung eines singulaeren Masses bzgl. λ). *Sei zu jedem $x \in \mathbb{R}^N$ eine freundlich zusammenziehende Folge $E_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, gewaehlt. Ist μ ein komplexes Maß mit $\mu \perp \lambda$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} = 0$$

fuer λ-fast-alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Beweis. Ohne Einschraenkung sei μ ein positives Maß. (Andernfalls kann man μ wie oben diskutiert zerlegen zunaechst in Real- und Imaginaertiel und dies dann in ihren jeweiligen Positiv- und Negativteil. Alternativ kann man auch zu $|\mu|$ uebergehen.) Nun gilt

$$\frac{\mu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} \leq \frac{\mu(U_{r_n}(x))}{\alpha(x)\lambda(U_{r_n}(x))} \leq \frac{1}{\alpha(x)} \frac{\mu(U_{r_n}(x))}{\lambda(U_{r_n}(x))}.$$

Es reicht also $D\mu(x) = 0$ fuer λ fast alle x zu zeigen. Definiere nun

$$(\overline{D}\mu)(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{0<r<1/n} (Q_r\mu)(x) \right).$$

Dann ist $\overline{D}\mu$ meßbar. (Der Ausdruck in der Klammer ist unterhalbstetig (vgl. Begruendung oben) und die Folge (in n) der Funktionen konvergiert fallend.) Offenbar impliziert $\overline{D}\mu(x) = 0$ dann $D\mu(x) = 0$. Es reicht also $\overline{D}\mu(x) = 0$ fuer λ -fast - alle $x \in \mathbb{R}^N$ zu zeigen. Waehle dazu $s > 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wegen $\mu \perp \lambda$ ist μ auf eine Menge vom Lebesguemaß Null konzentriert.

Idee. Zerlege $\mu = \mu_1 + \mu_2$, wobei μ_1 auf einer kompakten Menge vom Lebesguemaß Null getragen ist und μ_2 kleine Gesamtmasse hat.

Es ist μ regulaer nach einem schon diskutierten Theorem. Damit existiert also eine kompakte Menge K mit

$$\lambda(K) = 0, \text{ und } \mu(K) \geq \mu(X) - \varepsilon.$$

Sei μ_1 die Einschraenkung von μ auf K d.h.

$$\mu_1(E) = \mu(K \cap E)$$

und

$$\mu_2 := \mu - \mu_1.$$

Dann gilt

$$\mu_2(X) \leq \varepsilon$$

und fuer jedes $x \in \mathbb{R}^N \setminus K$ gilt (da K kompakt, also um x eine Kugel in $\mathbb{R}^N \setminus K$ existiert)

$$(\overline{D}\mu)(x) = (\overline{D}\mu_2)(x) \leq (M\mu_2)(x).$$

Damit folgt also

$$\{x : \overline{D}\mu(x) > s\} \subset K \cup \{x : (M\mu_2)(x) > s\}.$$

Wegen $\lambda(K) =$ folgt nach Anwenden des Maximaltheorem

$$\lambda(\{x : \overline{D}\mu(x) > s\}) \leq \frac{3^N}{s}\mu_2(X) \leq \frac{3^N}{s}\varepsilon.$$

Da dies fuer alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt

$$\lambda(\{x : \overline{D}\mu(x) > s\}) = 0.$$

Da dies fuer alle $s > 0$ gilt, folgt $(\overline{D}\mu)(x) = 0$ fuer λ fast alle $x \in \mathbb{R}^N$. $\square$

Wir koennen nun die beiden vorangehenden Theoreme zu folgendem Satz zusammensetzen.

Theorem (Berechnen von μ_{ac}). *Sei zu jedem $x \in \mathbb{R}^N$ eine freundlich zusammenziehende Folge $E_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, gewaehlt. Sei μ ein komplexes Maß auf $\mathbb{R}^N$ und $\mu = f\lambda + \mu_{sing}$ seine Lebesguezerlegung. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} = f(x)$$

fuer λ - fast - alle $x \in \mathbb{R}^N$. Insbesondere gilt $\mu \perp \lambda$ genau dann, wenn $(D\mu)(x) = 0$ fuer λ - fast - alle $x \in \mathbb{R}^N$ gilt.

Beweis. Es gilt

$$\frac{\mu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} = \frac{(f\lambda)(E_n(x)) + \mu_{sing}(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} = \frac{(f\lambda)(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} + \frac{\mu_{sing}(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))}.$$

Nun folgt die erste Aussage aus den beiden vorangehenden Theoremen. Das 'Insbesondere' folgt sofort aus der ersten Aussage. $\square$

Bemerkung. Das Theorem besagt daß man den absolut stetigen Teil eines jeden komplexen Maßes durch Grenzwertbildung 'ausrechnen' kann.

Den singulaeren Teil des Maßes kann man nicht durch Grenzwertbildung ausrechnen. Man kann aber einen 'Traeger' ausrechnen.

Theorem (Berechnen des Traeger von μ_{sing}). *Sei μ ein positives Borelmaß auf $\mathbb{R}^N$ mit $\mu \perp \lambda$. Dann gilt*

$$(D\mu)(x) = \infty$$

fuer μ - fast - alle $x \in \mathbb{R}^N$. Fuer

$$T := \{x \in \mathbb{R}^N : (D\mu)(x) = \infty\}$$

gilt also

$$\mu(\mathbb{R}^N \setminus T) = 0, \quad \textit{und} \quad \lambda(T) = 0.$$

Bemerkung. Man beachte den Unterschied zum obigen Theorem zur Berechnung der Ableitung eines singulaeren Maßes bzgl. λ fast aller Punkte.

Beweis. Nach Definition von Singularitaet gibt eine Borelmenge S (einen Traeger von μ) mit $\lambda(S) = 0$ und $\mu(\mathbb{R}^N \setminus S) = 0$. Aufgrund der Regularitaet des Lebesguemaßes gibt es weiterhin offene Mengen V_n mit

$$S \subset V_n \text{ und } \lambda(V_n) < \frac{1}{n}$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei fuer $m \in \mathbb{N}$ die Menge E_m definiert als die Menge aller $x \in S$, fuer die eine Folge r_k mit $r_k \to 0$ und

$$\mu(U_{r_k}(x)) < m\lambda(U_{r_k}(x))$$

fuer alle $k \in \mathbb{N}$ existiert. Dann gilt also die gewuenscht Aussage

$$(D\mu)(x) = \infty$$

fuer alle $x \in S \setminus \bigcup_m E_m$. Wir werden nun zu jedem E_m eine meßbare Obermenge Ω_m vom μ Maß Null finden (und damit folgt dann die Aussage): Fixiere m und n. Da V_n offen ist, existiert zu jedem $x \in E_m$ eine Kugel U_x in V_n mit

Ende der 12. Vorlesung

$$\mu(U_x) < m\lambda(U_x).$$

Sei $\widetilde{U}_x$ die Kugel um x mit einem Drittel des Radius von U_x. Setze

$$W_{n,m} := \bigcup_{x \in E_m} \widetilde{U}_x.$$

Dann ist $W_{n,m}$ offen, in V_n enthalten und enthaelt E_m.

Behauptung. $\mu(W_{n,m}) \leq \frac{3^N m}{n}$

Bew. Sei K eine beliebige kompakte Menge in $W_{n,m}$. Dan wird K durch endlich viele der $\widetilde{U}_x$ ueberdeckt. Daher existiert nach dem Ueberdreckungslemma eine endliche Menge F in E_m mit den folgenden beiden Eigenschaften:

- Die $\widetilde{U}_x$, $x \in F$, sind disjunkt.
- $K \subset \cup_{x \in F} U_x$.

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\mu(K) &\leq \sum_{x \in F} \mu(U_x) \\
&< m \sum_{x \in F} \lambda(U_x) \\
&= 3^N m \sum_{x \in F} \mu(\widetilde{U}_x) \\
(Disjunkt) \quad &\leq 3^N m \mu(V_n) \\
&\leq 3^N m \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Da das kompakte K beliebig war, folgt die gewuenschte Behauptung.

Setze nun

$$\Omega_m := \bigcap_n W_{n,m}.$$

Dann ist Ω_m meßbar als abzaehbarer Schnitt von offenen (also meßbaren) Mengen. Es enthaelt E_m (da jedes $W_{n,m}$ dies tut) und nach der Behauptung ist Ω_m eine μ-Nullmenge. □

Beispiel. Als (sehr einfaches) Beispiel fuer die vorangehenden Theoreme betrachten wir einmal das Maß $\mu = \delta_p$ fuer ein festes $p \in \mathbb{R}^N$ (d.h. $\mu(E) = 1$ falls $p \in E$ und $\mu(E) = 0$ sonst). Dann sieht man leicht, daß $D\mu(x) = \infty$ fuer $x = p$ und $D\mu(x) = 0$ sonst.

Wir fassen die vorangehenden Betrachtungen noch einmal etwas zusammen. Dazu fuehren wir noch eine Definition ein.

Definition (Atome und Punktmaße). *Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^N$.*
(a) Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^N$ mit $\mu(\{x\}) \neq 0$ heißt Atom von μ.
(b) Das Maß μ heißt stetig (oder atomfrei), wenn fuer jedes $x \in \mathbb{R}^N$ gilt $\mu(\{x\}) = 0$.
(c) Das Maß μ heißt reines Punktmaß, wenn gilt

$$\mu = \sum_{x \in A} \mu(\{x\})\delta_x,$$

wobei A die Menge der Atome von μ ist.

Theorem (Lebesgue Zerlegung). *Sei μ ein positives endliches Maß auf $\mathbb{R}^N$. Dann exsitieren eindeutige Maße $\mu_{ac}, \mu_{sc}, \mu_{pp}$ mit*

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}$$

und folgenden Eigenschaften:

- *μ_{ac} ist absolut stetig bzgl. des Lebesguemaßes.*
- *μ_{sc} ist stetig und singulaer bzgl. des Lebesgmaßes.*
- *μ_{pp} ist ein reines Punktmaß.*

Weiterhin gilt

$$\mu_{sing} = \mu_{sc} + \mu_{pp}.$$

Mit $D\mu$ von oben und

$$T := \{x : D\mu(x) = \infty\}, \;\; P := \{x : \mu(\{x\}) > 0\}$$

gilt schliesslich

$$\mu_{ac} = (D\mu)\lambda, \;\; \mu_{sing} = 1_T\mu, \; \mu_{pp} = 1_P\mu, \mu_{sc} = 1_{T\setminus P}\mu.$$

Beweis. Das folgt einfach aus dem bisher schon gezeigten: Nach dem Satz zur Lebesguezerlegung gilt

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}$$

mit eindeutigen absolut stetigen μ_{ac} und singulaeren μ_{sing}. Wir koennen nun μ_{sing} weiter zerlegen in

$$\mu_{sing} = \mu_{sc} + \mu_{pp}$$

mit

$$\mu_{pp} := 1_P\mu_{sing}$$

mit $P = \{x : \mu_{sing}(\{x\}) > 0\}$ und $\mu_{sc} := \mu_{sing} - \mu_{pp}$. Da μ endlich ist, ist auch μ_{sing} endlich und damit ist P abzaehlbar. Wegen $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}$ und der Absolutstetigkeit von μ_{ac} gilt dann $P = \{x : \mu(\{x\}) > 0\}$ und $1_P\mu_{sing} = 1_P\mu$. Dann haben $\mu_{ac}, \mu_{sc}, \mu_{pp}$ die genannten Eigenschaften und es gilt (nach Konstruktion) $\mu_{sing} = \mu_{sc} + \mu_{pp}$. Die Zerlegung von μ_{sing} ist eindeutig (mit den genannten Eigenschaften), wie man sich leicht ueberlegt. Damit folgt insgesamt die Eindeutigkeit. Die letzte Aussage folgt aus den zuletzt bewiesenenen Theoremen. Dabei nutzt man (bei der Formel fuer μ_{sing}, daß $\{x : D\mu(x) = \infty\}$ eine Lebesgue - Nullmenge ist (nach vorvorigem Theorem), die offenbar die Menge $\{x : D\mu_{sing}(x) = \infty\}$ enthaelt, die (nach dem vorigen Theorem) ein Traeger von μ_{sing} ist . □

Bemerkung. (a) In den obigen Bezeichnungen steht *ac* fuer 'absolutely continuous', *sc* fuer 'singular continous' und *pp* fuer 'pure point'.

(b) Fuehrt man noch den stetigen ('continuous') Anteil $\mu_{cont} = \mu_{ac} + \mu_{sc}$ ein, so laesst sich die obige Lebesguezerlegung so schreiben

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp} = \mu_{ac} + \mu_{sing} = \mu_{cont} + \mu_{pp}.$$

Dabei unterscheiden sich die Ausdruecke zu den beiden Seiten der letzten Gleichung nur dadurch, daß der Term μ_{sc} verschieden eingruppiert wird.

KAPITEL 2

Die Boreltransformation

Die Boreltransformation gehoert mit der Fouriertransformation und der Laplacetransformation zu den bekannten Transformationen. Sie ist auch unter den Namen wie Herglotz-, Bochner- und Cauchy - Transformation bekannt. In der Spektraltheorie von selbstadjungierten Operatoren L spielen alle drei Transformationen eine große Rolle:

- Fouriertransformation $\mu \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} d\mu(y)$: Unitaere Gruppe e^{-itL}, $t \in \mathbb{R}$ (Schroedingergleichung).
- Laplacetransformation $\mu \mapsto \int_0^\infty e^{-tx} d\mu(x)$: Halbgruppe e^{-tL} (Waermeleitungsgleichung).
- Boreltransformation $\mu \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t-z}$: Resolvente $(L-z)^{-1}$, $z \in \varrho(L)$ (Poissongleichung).

Sie bilden (gewisse) Maße jeweils bijektiv auf (gewisse) Funktionen ab. In diesem Kapitel geht es um die Boreltransformation.

1. Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Die Boreltransformation kann man fuer Maße auf $\mathbb{R}$ mit einer gewissen Beschraenktheitseigenschaft definieren. Wir werde sie hier fuer beschraenkte Maße untersuchen. Zum allgemeinen Fall machen wir am Ende des Kapitels noch eine Bemerkung.

Definition (Boreltransformation). *Sei μ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$. Die Boreltransformation $\mathcal{R}\mu$ von μ ist definiert durch*

$$\mathcal{R}\mu : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C},\ \ \mathcal{R}\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t-z}.$$

Bemerkungen zur Definition.

- Hier ist die obere Halbebene $\mathbb{C}^+$ definiert als
$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}.$$
- Fuer $z \in \mathbb{C}^+$ ist $t \mapsto \frac{1}{t-z}$ beschraenkt. Damit existiert in der Tat das angegebenen Integral, da das Maß μ endlich ist.
- Tatsaechlich existiert das angegebene Integral fuer alle $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(\mu)$, da fuer solche z die Funktion $t \mapsto \frac{1}{t-z}$ beschraenkt ist.

Ende der 13. Vorlesung

Die **Grundidee** aller folgenden Untersuchungen ist, daß $\Im \mathcal{R}\mu(\cdot + i\varepsilon)$ fuer $\varepsilon \to 0$ gegen μ konvergiert in vielerlei Weise. In diesem Sinne kann man dann μ als Randwert von $\mathcal{R}\mu$ verstehen.

Zum Aufwaermen berechnen wir zunaechst einmal den Real- und Imaginaerteil von $\mathcal{R}\mu(z)$ fuer $z = E + i\varepsilon$.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\mu(z) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\mu(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\overline{t-z}}{(t-z)\overline{(t-z)}} d\mu(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{t-E+i\varepsilon}{(t-E)^2+\varepsilon^2} d\mu(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{t-E}{(t-E)^2+\varepsilon^2} d\mu(t) + i\int \frac{\varepsilon}{(t-E)+\varepsilon^2} d\mu(t).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine fundamentale Eigenschaft der Boreltransformation.

FOLGERUNG. *Fuer $\mu \neq 0$ gilt $\Im \mathcal{R}\mu(z) > 0$ fuer alle $z \in \mathbb{C}^+$. Es bildet also $\mathcal{R}\mu$ die obere Halbebene in sich selber ab.*

Auch erhalten wir unter Nutzen von

$$\frac{\varepsilon^2}{(t-E)^2+\varepsilon^2} \leq 1$$

und

$$\frac{|\varepsilon(t-E)|}{(t-E)^2+\varepsilon^2} \leq \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2+(t-E)^2}{(t-E)^2+\varepsilon^2} \leq 1$$

noch folgende Eigenschaft.

FOLGERUNG. *Es gilt $0 \leq (\Im z)\Im\mathcal{R}\mu(z) \leq \mu(\mathbb{R})$ fuer alle $z \in \mathbb{C}^+$. Es ist also $z \mapsto (\Im z)\Im\mathcal{R}\mu(z)$ eine beschraenkte Funktion. Ebenso ist $z \mapsto (\Im z)(\mathcal{R}\mu(z))$ eine beschraenkte Funktion.*

Bemerkung. Das bedeutet, daß $\Im BT$ fuer z mit grossem Imaginaerteil relativ rasch faellt und fuer z mit kleinem Imaginaerteil nicht so schnell waechste.

Wir wenden uns nun noch der Ableitung der Boreltransformation eines Maßes zu: Es gilt

$$\mathcal{R}\mu(z) - \mathcal{R}\mu(z_0) = \int \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-z_0}\right) d\mu(t)(t) = \int \frac{z-z_0}{(t-z)(t-z_0)} d\mu(t).$$

Damit folgt

$$\frac{\mathcal{R}\mu(z)-\mathcal{R}\mu(z_0)}{z-z_0} = \int \frac{1}{(t-z)(t-z_0)} d\mu \to \int \frac{1}{(t-z_0)^2} d\mu.$$

Hier nutzt man im letzten Schritt den Satz von der dominierten Konvergenz (punktweise Konvergenz von (fuer z nahe z_0) gleichmaeßig beschraenkten Funktionen bei Endlichkeit des in Frage stehenden Maßes).

FOLGERUNG. *Es ist $\mathcal{R}\mu$ holomorph (d.h. komplex differenzierbar).*

Wir fassen die Eigenschaften der Boreltransformation eines Maßes zusammen. Wir werden spaeter sehen, daß diese Eigenschaften genau die Boreltransformationen beschraenkter Maße charakterisieren.

LEMMA (Charakteristische Eigenschaften von $\mathcal{R}\mu$). *Sei μ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{R}\mu$ seine Boreltransformation. Dann gilt:*

- *Es bildet $\mathcal{R}\mu$ die obere Halbebene in sich selber ab.*
- *Es ist $\mathcal{R}\mu$ komplex differenzierbar.*
- *Es ist die Funktion $z \mapsto (\Im z)\mathcal{R}\mu(z)$ beschraenkt auf der oberen Halbebene.*

Bemerkung. Funktionen mit den ersten beiden Eigenschaften sind auch bekannt unter den Namen *Nevanlina*-Funktionen, *Pick*-Funktionen, *Nevanlinna-Pick*-Funktionen, *Herglotz*-Funktionen oder $\mathcal{R}$-Funktionen.

2. Das Maß μ als Randwert von $\mathcal{R}\mu$

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß

$$\Im\mathcal{R}\mu(E+i\varepsilon) = \int \frac{\varepsilon}{(t-E)^2+\varepsilon^2} d\mu(t)$$

fuer $\varepsilon \to 0$ gegen μ konvergiert mancherlei Weise. In diesem Sinne ist also das Maß μ auf $\mathbb{R} = \partial\mathbb{C}^+$ Grenzwert bzw. Randwert der Funktion $\Im\mathcal{R}$ auf $\mathbb{C}^+$.

Um die Notation zu vereinfachen, definieren wir fuer $\varepsilon > 0$ die Funktion

$$p_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty) \;\; p_\varepsilon(x) := \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.$$

Weiterhin definieren wir fuer eine beschraenkte meßbare Funktion f auf $\mathbb{R}$ und ein beschraenktes Maß μ die Faltung

$$f*\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \;\; (f*\mu)(x) = \int f(x-t)d\mu(t).$$

Damit gilt dann also

$$\Im\mathcal{R}\mu(E+i\varepsilon) = (p_\varepsilon * \mu)(E).$$

Plan fuer die folgenden Untersuchungen: Wir weren sehen, daß die $\frac{1}{\pi}p_\varepsilon$ sich zu einer 'Punktmasse' in 0 zusammenziehen, also - in gewissem Sinne - gegen δ_0 konvergieren . Entsprechend kann man folgendes erwarten:

- Konvergenz im gemittelten Sinne:
$$p_\varepsilon * \mu \to \delta_0 * \mu = \mu.$$
- Konvergenz im punktweisen Sinne:
$$p_\varepsilon * \mu(E) \sim \int \frac{1}{\lambda(U_\varepsilon(E))} 1_{U_\varepsilon(E)} d\mu = \frac{\mu(U_\varepsilon(E)}{\lambda(U_\varepsilon(E))} \to D\mu(E).$$

Das werden wir im folgenden zeigen. Wir brauchen dazu jeweils noch etwas Vorbereitung.

Wesentliche Eigenschaften der p_ε sammeln wir zunaechst in folgender Proposition.

PROPOSITION (Eigenschaften der p_ε). *Die Funktionen p_ε sind radialsymmetrisch und fuer jedes $t \geq 0$ ist die Niveaumenge $\{x : p_\varepsilon(x) > t\}$ eine Kugel und es gelten folgende Aussagen:*

- $\int p_\varepsilon d\lambda = \pi$ *fuer alle $\varepsilon > 0$. (Normiert)*

- *Fuer jedes $R > 0$ konvergiert $(p_\varepsilon 1_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)})$ gleichmaeßig geben 0. Insbesondere konvergiert also $(p_\varepsilon(x))$ gegen 0 fuer jedes $x \neq 0$. (Konzentrationseigenschaft - $\|\cdot\|_\infty$.)*
- *$\int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} \to \pi$, $\varepsilon \to 0$ fuer jedes $R > 0$. (Konzentrationseigenschaft-Lebesguemaß)*

Beweis. Offenbar gilt $p_\varepsilon(x) = p_\varepsilon(-x)$. Damit sind die Funktionen radialsymmetrisch.
Nun zu den einzelnen Punkten:
Erster Punkt: Eine direkte Rechnung liefert

$$\begin{aligned} \int p_\varepsilon \, d\lambda &= \int \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} d\lambda(x) \\ &= \int \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{(x/\varepsilon)^2+1} \, d\lambda(x) \\ (x = \varepsilon y) \quad &= \int \frac{1}{y^2+1} d\lambda(y) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Zweiter Punkt: Offenbar gilt

$$p_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \leq \frac{\varepsilon}{R^2}$$

fuer $x \notin [-R,R]$. Das liefert sofort die Behauptung.
Dritter Punkt: Wie bei der Rechnung im ersten Punkt ergibt sich

$$\int_{(-R,R)} p_\varepsilon(x) d\lambda(x) = \int_{(-R/\varepsilon, R/\varepsilon)} \frac{1}{y^2+1} d\lambda \to \pi.$$

Damit folgt nun aus dem ersten Punkt der dritte Punkt. □

Fuer eine beschraenkte meßbare Funktion f und eine Funktion $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\lambda)$ definieren wir die Faltung

$$f * h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

durch

$$(f*h)(E) := \int h(E-t)f(t)d\lambda(t) = \int h(-t)f(t+E)d\lambda(t) = \int h(t)f(E-t)d\lambda(t).$$

Bemerkung. Man kann sich leicht klarmachen, daß dies mit oben gegebener Definition fuer Maße vertraeglich ist in folgendem Sinne: Gehoert h zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\lambda)$ und ist $\mu := h\lambda$, so gilt fuer jedes beschraenkte meßbare f

$$f * \mu = f * (h\lambda) = (f * h)$$

wie folgende kleine Rechnung zeigt:

$$f * \mu(E) = \int f(E-t)d\mu(t) = \int f(E-t)h(t)d\lambda = (f*h)(E).$$

Lemma (Gleichmaeßige Konvergenz $p_\varepsilon * f \to f$). *Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ beschraenkt und gleichmaßig stetig. Dann konvergiert $\frac{1}{\pi} p_\varepsilon * f$ gleichmaeßig gegen f.*

Bemerkung.

- Jede Funktion $f \in C_c(\mathbb{R})$ (und sogar jede Funktion in $C_0(\mathbb{R})$) ist gleichmaeßig stetig und beschraenkt.
- Der Beweis zeigt, daß fuer beliebige meßbare beschraenkte f die Folge $\frac{1}{\pi} p_\varepsilon * f(E)$ gegen $f(E)$ konvergiert in allen Stetigkeitspunkten E von f.
- (Uebung) Tatsaechlich gilt sogar: Es konvergiert $p_\varepsilon * f$ gegen f in $\mathcal{L}^1$ fuer jedes $f \in \mathcal{L}^1$. (Bew: Zeige zunaechst (Fubini), daß p_ε tatsaechlich $\mathcal{L}^1$ nach $\mathcal{L}^1$ abbildet mit Norm $\|p_\varepsilon\| \leq \pi$ gleichmaßig in $\varepsilon > 0$. Approximiere nun $f \in \mathcal{L}^1$ durch $g \in C_c(\mathbb{R})$ und nutze obiges Lemma.)

Beweis. Sei $\eta > 0$ beliebig gegeben. (Zu zeigen $|\frac{1}{\pi}(p_\varepsilon * f)(E) - f(E)| \leq 2\eta$ gleichmaeßig in E fuer alle genuegend kleinen $\varepsilon > 0$.)
Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{\pi}(p_\varepsilon * f)(E) - f(E)\right| \\
= & \left|\frac{1}{\pi}\int f(t) p_\varepsilon(E-t) d\lambda(t) - f(E)\right| \quad \text{(Definition } p_\varepsilon * f) \\
= & \left|\frac{1}{\pi}\int (f(t) - f(E)) p_\varepsilon(E-t) d\lambda(t)\right| \quad (p_\varepsilon \text{ normiert}) \\
\leq & \frac{1}{\pi}\int_{(E-\delta,E+\delta)} |f(t)-f(E)| p_\varepsilon(E-t) d\lambda(t) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus(E-\delta,E+\delta)} |f(t)-f(E)| p_\varepsilon(E-t) d\lambda(t) \\
= & \frac{1}{\pi}\int_{(-\delta,\delta)} |f(E+t)-f(E)| p_\varepsilon(t) d\lambda(t) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |f(t+E)-f(E)| p_\varepsilon(t) d\lambda(t) \quad \text{(Verschieben)}
\end{aligned}$$

fuer alle $\delta > 0$.
Da f gleichmaeßig stetig ist, koennen wir nun ein $\delta > 0$ waehlen mit

$$|f(x) - f(y)| \leq \eta$$

fuer all x, y mit $|x - y| \leq \delta$. Damit koennen wir (fuer dieses δ) abschaetzen

$$|\frac{1}{\pi}(p_\varepsilon * f)(E) - f(E)| \leq \eta + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} p_\varepsilon(t) d\lambda(t).$$

Dabei haben wir die Normierung der p_ε zur Abschaetzung des ersten Termes verwendet.
Waehlen wir nun ε genuegend klein, so folgt aus der Konzentrationseigenschaft bzgl. des Lebesguemaßes der p_ε, daß der zweite Term kleiner als η wird. Damit folgt insgesamt

$$|\frac{1}{\pi}(p_\varepsilon * f)(E) - f(E)| \leq 2\eta$$

fuer alle $E \in \mathbb{R}$ fuer alle genuegend kleinen $\varepsilon > 0$. □

THEOREM (Vage Konvergenz der $\Im\mathcal{R}\mu(\cdot + i\varepsilon)\lambda$ gegen μ). *Sei μ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$. Dann konvergieren die Maße $\frac{1}{\pi}\Im(\mathcal{R}\mu)(\cdot + i\varepsilon)\lambda$ vage gegen μ, d.h. es gilt fuer jedes $f \in C_c(\mathbb{R})$*

$$\int f(E) \Im\mathcal{R}\mu(E + i\varepsilon)\lambda(E) \to \int f(t) d\mu(t), \varepsilon \to 0.$$

Bemerkung. Das Theorem besagt insbesondere, daß das Maß μ durch seine Boreltransformation eindeutig bestimmt ist (da man es wiedergewinnen kann). Damit ist also die Boreltransformation injektiv. Wir werden spaeter ihr Bild bestimmen. Es wird sich zeigen, daß dies (neben der Nullfunktion) genau aus den holomorphen Abbildungen h der oberen Halbebene in sich besteht, fuer die $z \mapsto h(z)\Im z$ gleichmaeßig beschraenkt ist.

Beweis. Das folgt aus dem vorangehenden Lemma und dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int f(E)\Im\mathcal{R}\mu(E+i\varepsilon)d\lambda(E) &= \frac{1}{\pi}\int f(E)\left(\int \frac{\varepsilon}{(t-E)^2+\varepsilon^2}d\mu(t)\right)d\lambda(E)\\
\text{(Fubini)} &= \int\left(\frac{1}{\pi}\int f(E)\frac{\varepsilon}{(t-E)^2+\varepsilon^2}d\lambda(E)\right)d\mu(t)\\
&= \int \frac{1}{\pi}(p_\varepsilon * f)(t)d\mu(t)\\
\text{(glm. Konv. voriges Lemma)} &\to \int f(t)d\mu(t).
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Ende der 14. Vorlesung.

Mit dem vorigen Theorem haben wir die 'gemittelte' Konvergenz der $\Im\, BT\mu$ gezeigt. Wir wenden uns nun der punktweisen Konvergenz zu. Dazu brauchen wir noch etwas Vorbereitung.

Fuer eine meßbare nichtnegative Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty]$ und $t \geq 0$ definieren wir

$$B_t^h := \{x \in \mathbb{R} : h(x) > t\}.$$

Lemma (Cavalierisches Auschoepfungsprinzip). *Sei μ ein beschraenktes Maß auf $\mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty]$ eine nichtnegative Funktion. Dann gilt*

$$\int_X h(x)d\mu(x) = \int_{[0,\infty)} \mu(B_t^h)d\lambda(t).$$

Zeichnung.

Bemerkung. Man kann obige Formel auch als Definition des Integrals bzgl. μ an den Anfang der Theorie stellen. Das erlaubt weitreichende Verallgemeinerungen:

- Es ist $t \mapsto \mu(B_t^h)$ offenbar monoton fallend. Daher existiert sogar das Riemann-Integral $\int_0^\infty \mu(B_t^h)dt$ und stimmt mit dem angegebenen Lebesgue-Integral ueberein. Damit kann man also Integrationstheorie bzgl. beliebiger Maße auf das Riemann-Integral zurueckfuehren.
- Sogar wenn $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty)$ nicht σ-additiv ist, sondern lediglich monoton, wird die Funktion $t \mapsto \mu(B_t^h)$ offenbar monoton fallend und es ist dann

  $$\int_X h(x)d\mu(x) = \int_0^\infty \mu(B_t^h)dt$$

  eine sinnvolle Definition fuer ein Integral. Dieses Integral wird dann i.a. nicht mehr linear sein. Aber es gelten die ueblichen Grenzwertsaetze (de Giorgi).

Beweis. Wir rechnen unter Nutzen des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_X h(x)d\mu(x) &= \int_X \int_0^{h(x)} dt d\mu(x) \\
&= \int_X \int_{[0,\infty)} 1_{[0,h(x))}(t) d\lambda(t) d\mu(x) \\
\text{(Fubini)} \quad &= \int_{[0,\infty)} \int_X 1_{[0,h(x))}(t) d\mu(x) d\lambda(t) \\
(1_{[0,h(x))}(t) = 1_{\{x:h(x)>t\}}) \quad &= \int_{[0,\infty)} \mu(B_t^h) d\lambda(t).
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

PROPOSITION. *Sei μ ein beschraenktes Maß auf $\mathbb{R}$ und (h_n) eine Folge von meßbaren nichtnegativen Funktionen mit folgenden drei Eigenschaften:*

- *Jedes h_n ist radialsymmetrisch und fuer jedes $t \geq 0$ ist $\{x : h_n(x) \geq t\}$ eine Kugel.*
- *Fuer jedes $R > 0$ konvergiert die Folge $(h_n 1_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)})$ punktweise gegen Null und ist gleichmaeßig beschraenkt.*
- *Fuer jedes $R > 0$ konvergiert $\int h_n 1_{(-R,R)} d\lambda$ gegen 1.*

Dann gilt fuer $p \in \mathbb{R}$

$$(h_n * \mu)(p) \to a \in [0,\infty],$$

wenn $D\mu(p) = a$ gilt.

Bemerkung.

- Eine voellig analoge Aussage (mit analogem Beweis) gilt in $\mathbb{R}^N$.
- Wir haben schon gesehen, daß man in der Definition von $D\mu(x)$ die sich zusammenziehenden Kugeln ersetzen kann, durch andere (geeignet) sich zusammenziehende Mengen. Die Proposition besagt nun, daß man auch andere Formen von Mittelungen betrachten kann.
- Die oben betrachteten Funktionen p_ε haben die (fuer die h_n) gewuenschten Eigenschaften.

Beweis. Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $D\mu(p) = a$ fuer ein $a \in [0,\infty]$ gegeben.
Ohne Einschraenkung $p = 0$ (sonst Verschieben). Ohne Einschraenkung $a \in [0,\infty)$. (Der andere Fall ist sogar noch einfacher zu behandeln.)
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Zu zeigen:

$$|h_n * \mu(p) - a| \leq \varepsilon$$

fuer alle genuegend großen n.
Aufgrund von $D\mu(p) = a$ existiert ein $R > 0$ mit

$$\left|\frac{\mu(U_r)}{\lambda(U_r)} - a\right| < \varepsilon$$

fuer alle $0 < r \leq R$. (Hier ist U_r die offene Kugel um 0 mit Radius r.) Nun gilt

$$\int h_n \, d\mu = \int_{U_R} h_n \, d\mu + \int_{\mathbb{R}\setminus U_R} h_n \, d\mu.$$

Aufgrund der Endlichkeit von μ und der zweiten Voraussetzung an h_n konvergiert der zweite Term nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gegen 0 fuer $n \to \infty$. Es reicht also den ersten Term zu untersuchen:

Wir definieren nun die Funktionen k_n durch

$$k_n := h_n 1_{U_R}$$

und

$$B_t^n := B_t^{k_n} = \{x : k_n(x) > t\}.$$

Dann ist B_t^n eine Kugel (da fuer h_n und damit auch fuer k_n entsprechendes gilt) und in U_R enthalten (da k_n außerhalb von U_R verschwindet). Insbesondere gilt also

$$(*) \qquad \left| \frac{\mu(B_t^n)}{\lambda(B_t^n)} - a \right| < \varepsilon$$

fuer alle $t \geq 0$. Damit koennen wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{U_R} h_n d\mu &= \int k_n d\mu \\
\text{(Cavalieri)} \quad &= \int_{[0,\infty)} \mu(B_t^n) d\lambda(t) \\
&= \int_{[0,\infty)} \frac{\mu(B_t^n)}{\lambda(B_t^n)} \lambda(B_t^n) d\lambda(t).
\end{aligned}$$

Damit koennen wir den $\limsup$ abschaetzen zu

$$\begin{aligned}
\limsup_n \int_{U_R} h_n d\mu &= \limsup_n \int_{[0,\infty)} \frac{\mu(B_t^n)}{\lambda(B_t^n)} \lambda(B_t^n) d\lambda(t) \\
(*) \quad &\leq \limsup_n \int_{[0,\infty)} (a+\varepsilon) \lambda(B_t^n) d\lambda(t) \\
&= (a+\varepsilon) \limsup_n \int_{[0,\infty)} \lambda(B_t^n) d\lambda(t) \\
\text{(Cavalieri (fuer } \lambda \text{))} \quad &= (a+\varepsilon) \limsup_n \int k_n d\lambda \\
&= (a+\varepsilon) \limsup_n \int_{U_R} h_n d\lambda \\
&= a + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hier wird im letzten Schritt die dritte Eigenschaft der Folge (h_n) genutzt.

Voellig analog zeigt man,

$$\liminf_n \int_{U_R} h_n d\mu \geq a - \varepsilon.$$

Insgesamt folgt also

$$a - \varepsilon \leq \liminf_n \int_{U_R} h_n d\mu \leq \limsup_n \int_{U_R} h_n d\mu \leq a + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt die gewuenschte Aussage. $\square$

Als Folgerung aus der vorigen Proposition ergibt sich sofort die folgende Aussage.

THEOREM (Punktweiser Grenzwert von $\Im\mathcal{R}\mu$). *Sei μ ein beschraenktes positives Maß auf $\mathbb{R}$ mit Lebesguezerlegung*

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}$$

und $\mu_{ac} = f\lambda$ und $\mu_{sing} = \mu_{sc} + \mu_{pp}$. Dann gilt:

(ac) *Es konvergiert*

$$\frac{1}{\pi}(\Im\mathcal{R}\mu)(E + i\varepsilon) \to f(E), \varepsilon \to 0,$$

fuer λ - fast - alle $E \in \mathbb{R}$.

(sing) *Es ist*

$$T := \{E : \frac{1}{\pi}(\Im\mathcal{R}\mu)(E + i\varepsilon) \to \infty\}$$

eine Lebesguenullmenge und ein Traeger von μ_{sing} d.h. $\mu_{sing}(\mathbb{R} \setminus T) = 0$.

(pp) *Fuer jedes $E \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\mu(\{E\}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \Im\mathcal{R}\mu(E + i\varepsilon).$$

Beweis. Die Aussage zum Punktanteil folgt einfach direkt. Die uebrigen Aussagen folgen aus der vorangehenden Proposition und den Saetzen des vorigen Kapitels zum Lebesgueschen Differentiationssatz. □

Notation. Wir schreiben $\Im\mathcal{R}\mu(E + i0)$ fuer $\lim_{\varepsilon\to 0} \Im\mathcal{R}\mu(E + i\varepsilon)$ (falls der Grenzwert existiert).

Bemerkung. Tatsaechlich kann man zeigen, daß auch $\lim_{\varepsilon\to 0} \Re\mathcal{R}\mu(E+i\varepsilon)$ fuer λ-fast-alle E existiert. Fuer solche E bezeichnet man dann den Grenzwert mit $\Re\mathcal{R}\mu(E + i0)$. Weiterhin setzt man $\mathcal{R}\mu(E + i0) = \Re\mathcal{R}(E + i0) + i\Im\mathcal{R}(E + i0)$ fuer solche E, in denen sowohl der Realteil als auch der Imaginaerteil einen Grenzwert hat.

Ende der 15. Vorlesung

Zum Abschluss des Abschnittes praesentieren wir noch eine punktweise Aussage ueber Existenz eines gemittelten Grenzwertes. Genauer geht es um Existenz der Grenzwerte der Verteilungsfunktionen. Die Aussage steht etwas zwischen den bisher bewiesenen Aussagen. Der Beweis ist eine Variante der Aussage zur schwachen Konvergenz und sogar noch einfacher.

THEOREM (Stieltjes Umkehrformel). *Sei μ ein endliches positives Maß auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{R}\mu$ seine Boreltransformation. Dann gilt*

$$\mu((-\infty, s]) = \lim_{\delta\to 0+} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{(-\infty,s+\delta]} \Im\mathcal{R}\mu(E + i\varepsilon) d\lambda(E)$$

fuer alle $s \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wie schon beim Beweis des Konvergenzsatz handelt es sich im Kern um eine Anwendung des Satzes von Fubini.

Es gilt (s.o.)

$$\Im\mathcal{R}\mu(E + i\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(E - t)^2 + \varepsilon^2} d\mu(t).$$

Damit folgt fuer jedes $r \in \mathbb{R}$ dann

$$\begin{aligned}
\int_{(-\infty,r]} \Im\mathcal{R}\mu(E+i\varepsilon)d\lambda(E) &= \int_{(-\infty,r]}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(E-t)^2+\varepsilon^2} d\mu(t)d\lambda(E) \\
\text{(Fubini)} \quad &= \int_{\mathbb{R}}\int_{(-\infty,r]} \frac{\varepsilon}{(E-t)^2+\varepsilon^2} d\lambda(E)d\mu(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\arctan\left(\frac{r-t}{\varepsilon}\right) + \frac{\pi}{2}\right) d\mu(t) \\
&\overset{\varepsilon\to 0}{\to} \int_{(-\infty,r)} \pi d\mu + \int_{\{r\}} \frac{\pi}{2} d\mu + \int_{(r,\infty)} 0 d\mu \\
&= \pi\mu((-\infty,r)) + \frac{\pi}{2}\mu(\{r\}) \\
&= \frac{\pi}{2}\mu((-\infty,r)) + \frac{\pi}{2}\mu((-\infty,r])
\end{aligned}$$

Hier nutzen wir im vorvorletzten Schritt den Satz von der dominierten Konvergenz. (Offenbar ist der Integrand beschraenkt durch π und konvergiert punktweise gegen π fuer $t < r$ bzw. $\pi/2$ fuer $t = r$ bzw 0 fuer $t > r$.) Setzt man nun $r = s + \delta$ und beachtet

$$\bigcap_{\delta>0}(-\infty, s+\delta) = (-\infty, s] = \bigcap_{\delta>0}(-\infty, s+\delta],$$

so folgt die gewuenschte Aussage einfach. □

3. Die Boreltransformation als bijektive Abbildung

In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß die Boreltransformation eine bijektive Abbildung zwischen beschraenkten Maßen und gewissen Funktionen auf der oberen Halbebene liefert. Zum Beweis werden wir zeigen, daß die in Frage stehenden Funktionen Randwerte in Form von Maßen haben und, daß die beiden Abbildungen

$$\text{Gewisse Funktionen von } \mathbb{C}^+ \text{ nach } \mathbb{C}^+ \overset{Randwert}{\longrightarrow} \text{Maß auf } \mathbb{R}$$

und

$$\text{Maß auf } \mathbb{R} \overset{Boreltr.}{\longrightarrow} \text{Gewisse Funktionen von } \mathbb{C}^+ \text{ nach } \mathbb{C}^+$$

zueinander invers sind. Das ist schon in sich ein bemerkenswertes Resultat. Man kann darauf aufbauend auch den sogenannten Spektralsatz beweisen. Zu den Betrachtungen sind gewisse Kenntnisse der Funktionentheorie nuetzlich. Daher beginnen wir mit einem Exkurs zur Funktionentheorie.

Exkurs - Funktionentheorie: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine stetige und stueckweise stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ heisst *Kurve in* U. Gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heisst die Kurve geschlossen. Ist $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und γ Kurve in U, so heißt

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

das *Kurvenintegral* von f ueber γ. Offenbar gilt

$$\left|\int_\gamma f(\zeta)d\zeta\right| \leq \|f|_\gamma\|_\infty \cdot \text{Laenge}(\gamma),$$

wobei die Laenger einer Kurve $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert ist durch

$$\text{Laenge}(\gamma) = \int_{[a,b]} |\gamma^{'}(t)| dt.$$

DAS Beispiel. Sei $p \in \mathbb{C}$ beliebig und $R > 0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = p + Re^{it}$. Dann gilt (mit $f(z) : \mathbb{C} \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{z-p}$ also

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta - p} d\zeta = 2\pi i.$$

(Kleine Rechnung: $\gamma^{'}(t) = iRe^{it}...$)
Die Verallgemeinerung auf $f : \mathbb{C} \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{C},\ f(z) = (z-p)^n,\ n \in \mathbb{Z}$, liefert

$$\int_\gamma f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \cdot \delta_{-1,n}.$$

Fuer weitergehende Untersuchungen brauchen wir noch das Konzept der *Homotopie*. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Die geschlossenen Kurven $\gamma, \varrho : [a,b] \longrightarrow U$ heissen *homotop in U* oder auch *ineinander ueberfuehrbar in U*, wenn es eine stetige Abbildung (Homotopie)

$$H : [0,1] \times [a,b] \longrightarrow U$$

gibt mit folgenden Eigenschaften:

- $H(0,\cdot) = \gamma,\ H(1,\cdot) = \varrho$,
- es ist $H(t,a) = H(t,b)$ fuer alle $t \in [0,1]$.

Ist γ homotop zu einer konstanten Kurve (mit Wert p), so heißt γ *auf den Punkte p zusammenziehbar*.
Hat die offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ die Eigenschaft, daß jede geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammenziehbar ist, so heißt die Menge *einfach zusammenhaengend*.
Ist $p \in U$ und $r > 0$ mit $B_r(p) \subset U$ und ist γ in $U \setminus \{p\}$ homotop zu $[0, 2\pi] \longrightarrow U \setminus \{p\}, t \mapsto p + re^{it}$, so sagt man, daß γ den Punkt p genau einmal umrundet und Inneres in U hat.

THEOREM (Charakterisierung holomorpher Funktionen). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind die folgenden Aussagen aequivalent:*

(i) *Es ist f auf U komplex differenzierbar (d.h. fuer jedes $p \in U$ existiert der Grenzwert $f^{'}(p) = \lim_{z \to p} \frac{f(z)-f(p)}{z-p}$).*

(ii) *Fuer alle geschlossenen Kurven γ, die sich in U auf einen Punkt zusammenziehen lassen, gilt*

$$\int_\gamma f(\zeta) d\zeta = 0.$$

(iii) *Fuer alle $p \in U$ gilt*

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} d\zeta$$

fuer alle Kurven γ, die p genau einmal umrunden und ihr Inneres in U haben.

(iv) *Fuer alle $p \in U$ existiert eine Potenzreihe $\sum a_n(z-p)^n$ mit Konvergenzradius mindestens $r = dist(p, U^c)$ und*

$$f(z) = \sum a_n(z-p)^n$$

fuer alle $z \in U_r(p)$.

Insbesondere ist jedes solche f beliebig oft (stetig) differenzierbar.

Definition (Holomorphe Funktion). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen. Eine stetige Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph auf U, wenn sie eine der aequivalenten Eigenschaften des vorigen Theorems besitzt.*

Bemerkungen und Bezeichnungen.

- Oft wird Holomorphie durch die Eigenschaft in (i) definiert.
- Die Aussage in (ii) fuer holomorphe Funktionenen wird auch als Cauchyscher-Integral-Satz bezeichnet.
- Die Aussage in (iii) fuer holomorphe Funktionen wird auch als Cauchy-Integral-Formel bezeichnet.
- Funktionen mit der Eigenschaft aus (iv) werden auch als analytisch bezeichnet.

Wir *skizzieren* einige Ideen zum Beweis des Satzes:
(iv)$\Longrightarrow$ (i): Das ist klar.

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Es wird zunaechst das Verschwinden des Kurvenintegrals fuer einfache Kurven (z.b. Dreieckswege)gezeigt. Das ist ein rafinierter Beweis. Anschließend wird die Homotopieinvarianz der Kurvenintegrales gezeigt. Daraus folgt dann die Aussage (ii) leicht.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Sei $\gamma_r = p + re^{i\cdot}$. Nach (ii) (und einer kleinen Ueberlegung; Zeichnung!) ist dann $\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} d\zeta$ fuer jede geschlossene Kurve, die p einmal umrundet, gerade gleich

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - p} d\zeta$$

fuer alle genuegend kleinen $r > 0$, naemlich alle $r > 0$, so dass $\gamma_r : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $p + re^{it}$ in U verlaeuft und sein Inneres ganz in U hat. Man kann sich nun leicht ueberlegen, daß fuer $r \to 0$ letzteres Integral gerade gegen $f(p)$ konvergiert (kleine Rechnung).

(iii)$\Longrightarrow$ (iv): Das folgt letzten Endes durch Bilden der geometrischen Reihe.

Ende der 16. Vorlesung.

Theorem (Herglotz). *Sei $f : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben mit folgenden Eigenschaften:*

- *f ist holomorph,*
- *$\Im f(z) \geq 0$ fuer alle $z \in \mathbb{C}^+$,*
- *$|f(z) \Im z| \leq M$ fuer alle $z \in \mathbb{C}^+$.*

Dann gibt es genau ein positives endliches Maß μ auf $\mathbb{R}$ mit $f = \mathcal{R}\mu$. Es gilt $\mu(\mathbb{R}) \leq M$.

Zum Beweis brauchen wir noch eine Hilfsaussage, die auch fuer sich schon von Interesse ist. Tatsaechlich liefert das folgende Lemma gerade in einem

Spezialfall, daß Boreltransformation und Randwertbildung zueinenader invers sind.

LEMMA (Konsistenzlemma). *Sei f wie im vorangehenden Theorem. Sei v der Imaginaerteil von f. Dann gilt fuer jedes $z = E + iy \in \mathbb{C}^+$ mit $E \in \mathbb{R}$ und $y > 0$ und alle ε mit $0 < \varepsilon < y$ die Gleichung*

$$v(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y - \varepsilon}{(E-t)^2 + (y-\varepsilon)^2} v(t + i\varepsilon) d\lambda(t).$$

Bemerkungen.

- Aufgrund von $|f(z)\Im z| \leq M$ ist $|v(t + i\varepsilon)| \leq M/\varepsilon$ gleichmaessig in t beschraenkt und damit existiert insbesondere das Integral auf der rechten Seite.
- Der Beweis benoetigt nicht die Voraussetzung des nichtnegativen Imaginaerteil. Tatsaechlich handelt es sich um eine allgemeine Aussage fuer harmonischen Funktionen mit beschraenkten ueberall definierten Randwerten. Diese kann auch mittels eines Maximumprinzip bewiesen werden. Diesen Themenkomplex werden wir im kommenden Abschnitt noch etwas diskutieren. Das wird noch einen weitere Perspektive auf holomorphe Funktionen lieferen, naemlich die Perspektive der harmonischen Funktionen.
- Fuehrt man die Funktion

  $$v_\varepsilon := \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}, \ \ v_\varepsilon(z) := v(z + i\varepsilon)$$

  sowie das zugehoerige Randwertmaß auf $\mathbb{R}$ naemlich

  $$\mu_\varepsilon := v_\varepsilon(t) d\lambda(t)$$

  ein, so besagt das Lemma gerade, dass die Funktion v_ε die Boreltransformation von μ_ε ist. Die um $i\varepsilon$ verschobene Funktion ist also in der Tat eine Boreltransformation und zwar die Boreltransformation ihres eigenen Grenzwertes. In diesem Sinne ist die Aussage des Lemma eine Konsistenzaussage.
- Der Beweis des Herglotzschen Satzes besteht im wesentlichen darin, in der Formel des Lemma den Grenzwert $\varepsilon \to 0$ durchzufuehren.

Beweis. (Lemma). Wir fuehren eine Reihe von Kurven ein: Sei fuer $r > 0$ und $\varepsilon > 0$ die Kurve $\sigma_{\varepsilon,r}$ gegeben durch

$$\sigma_{\varepsilon,r} : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}^+, \ t \mapsto i\varepsilon + re^{it}.$$

(Das ist gerade der 'obere Halbkreis um $i\varepsilon$.)
Sei weiterhin

$$\varrho_{\varepsilon,r} : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{C}^+, \ t \mapsto t + i\varepsilon.$$

(Das ist die kuerzeste Verbindung von $-r + i\varepsilon$ mit $+r + i\varepsilon$.) Sei $\gamma_{\varepsilon,r}$ die Kurve die durch Zusammensetzen von $\sigma_{\varepsilon,r}$ und $\varrho_{\varepsilon,r}$ entsteht.

Sei nun $z = E + iy \in \mathbb{C}^+$ beliebig gegeben. Sei $0 < \varepsilon < y$. (Dann liegt also z im Inneren von $\gamma_{\varepsilon,r}$ und $\overline{z} + 2i\varepsilon$ liegt nicht darin.) Dann gilt nach Cauchy-Integral-Formel und Cauchy-Integral-Satz folgendes:

$$
\begin{aligned}
f(z) &\overset{CIF}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,r}} \frac{1}{\zeta - z} f(\zeta)d\zeta \\
\text{(Kleiner Trick!)} &\overset{CIS}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\varepsilon,r}} \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - (\overline{z} + 2i\varepsilon)}\right) f(\zeta)d\zeta \\
\text{(Rechnung)} &= \frac{1}{\pi}\int_{\gamma_{\varepsilon,r}} \frac{y-\varepsilon}{(\zeta - z)(\zeta - \overline{z} - 2i\varepsilon)} f(\zeta)d\zeta \\
\text{(Definition } \gamma) &= \frac{1}{\pi}\int_{\sigma_{\varepsilon,r}} \frac{y-\varepsilon}{(\zeta - z)(\zeta - \overline{z} - 2i\varepsilon)} f(\zeta)d\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{\varrho_{\varepsilon,r}} \frac{y-\varepsilon}{(\zeta - z)(\zeta - \overline{z} - 2i\varepsilon)} f(\zeta)d\zeta.
\end{aligned}
$$

Wir untersuchen nun die beiden Terme fuer $r \to \infty$:

Erster Term: Auf $\sigma_{\varepsilon,r}$ gilt:

- $|f(\zeta)| \leq \frac{1}{\varepsilon}M$ (da $\Im\zeta \geq \varepsilon$).
- $\left|\frac{y-\varepsilon}{(\zeta-z)(\zeta-\overline{z}-2i\varepsilon)}\right| \leq \frac{C}{r^2}$ (da z fest ist und ζ auf dem Kreisbogen liegt).

Da ein Kurvenintegral immer abgeschaetzt werden kann durch das Produkt aus der Laenger der Kurve und dem Maximum des Betrages der Funktion auf ihr, folgt insgesamt, daß der erste Term gegen 0 konvergiert fuer $r \to \infty$.

Zweiter Term: Direkte Rechnung zeigt, daß der zweite Term gerade gleich ist

$$\frac{1}{\pi}\int_{[-r,r]} \frac{y-\varepsilon}{(E-t)^2 + (y-\varepsilon)^2} f(t+i\varepsilon)d\lambda(t).$$

Das konvergiert fuer $r \to \infty$ gegen

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y-\varepsilon}{(E-t)^2 + (y-\varepsilon)^2} f(t+i\varepsilon)d\lambda(t).$$

Aus diesen Betrachtungen und obiger Rechnung folgt also

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y-\varepsilon}{(E-t)^2 + (y-\varepsilon)^2} f(t+i\varepsilon)d\lambda(t).$$

Fuer den Imaginaerteil $v(z) := \Im f(z)$ folgt also

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y-\varepsilon}{(E-t)^2 + (y-\varepsilon)^2} v(t+i\varepsilon)d\lambda(t).$$

Das ist die gewuenschte Formel. □

Nach diesen Vorbereitungen koennen wir nun zum Beweis des Theorem kommen.

Beweis. (Theorem). Die *Eindeutigkeit* folgt, da aus der Boreltransformation das zugrundeliegende Maß nach Saetzen von oben wiedergewonnen werden kann.

Es ist also eine *Existenzaussage* zu zeigen. Sei v der Imaginaerteil von f und seien $z = E + iy \in \mathbb{C}^+$ beliebig sowie $0 < \varepsilon < y$ gegeben. Mit

$$|v(z)y| \leq |f(z)y| \leq M$$

folgt aus der Darstellung des vorigen Lemma

$$\left|\frac{1}{\pi}\int \frac{(y-\varepsilon)^2}{(E-t)^2 + (y-\varepsilon)^2} v(t+i\varepsilon)d\lambda(t)\right| = |(y-\varepsilon)v(z)| \leq |yv(z)| \leq M.$$

Bildet man nun den Grenzwert $y \to \infty$, so folgt aus dem Lemma von Fatou also

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} v(t + i\varepsilon) dt \leq M.$$

Damit sind also die Maße

$$\mu_\varepsilon := v(\cdot + i\varepsilon)\lambda$$

gleichmaeßig beschraenkt. (Das ist die entscheidende Aussage!)
Wir zeigen nun zunaechst:

- Konvergiert eine Teilfolge von (μ_ε) vage gegen ein Maß μ, so gilt $\mu(\mathbb{R}) \leq M$.
- Konvergiert eine Teilfolge μ_{ε_n} vage gegen das Maß μ, so konvergiert $\mu_{\varepsilon_n}(\varphi)$ gegen $\mu(\varphi)$ fuer alle $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$.

(Zum ersten Punkt: Sei $N > 0$ beliebig und $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ mit $1_{[-N,N]} \leq \varphi \leq 1$. Dann gilt

$$\mu([-N, N]) \leq \mu(\varphi) = \lim_n \mu_{\varepsilon_n}(\varphi) \leq M.$$

Zum zweiten Punkt: Jede Funktion in $C_0(\mathbb{R})$ kann man in der Supremumnorm beliebig gut durch Funktionen aus $C_c(\mathbb{R})$ approximieren. Damit folgt die gewuenschte Aussage leicht aus einem $\varepsilon/3$ Argument und der gleichmaeßigen Beschraenktheit der Maße.)

Ende der 16. Vorlesung.

Damit koennen wir nun die folgenden beiden Aussagen zeigen:

- Jede Teilfolge von (μ_ε) hat eine vage konvergente Teilfolge.
- Alle vage konvergenten Teilfolgen von (μ_ε) haben denselben Grenzwert.

Aus diesen beiden Aussagen folgt einfacht, daß die Folge (μ_ε) schon selber konvergiert gegen ein Maß mit endlicher Gesamtmasse. (Evtl. Details.)
Zu den Aussagen:
Die erste Aussage folgt aus der gleichmaessigen Beschraenktheit der involvierten Maße und einem Diagonalfolgenargument. (Waehle eine abzaehlbar dichte Teilmenge $D = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n ...\} \subset C_c(\mathbb{R})$; betrachte $(\mu_{\varepsilon_n}(\varphi_1))$. Das ist eine beschraenkte Folge. Daher gibt es eine beschraenkte Teilfolge ....)
Zur zweiten Aussage: Sei (μ_{ε_n}) konvergent gegen ν. Dann gilt fuer $z = x+iy$ also

$$\begin{aligned}
\Im \mathcal{R}\nu(z) &= \Im \mathcal{R}\nu(x + iy) \\
&= \int \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} d\nu(t) \\
\text{(Vage Konvergenz, glm. Beschr.)} \quad &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} v(t + i\varepsilon) d\lambda(t) \\
\text{(!)} \quad &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{(y - \varepsilon)}{(t-x)^2 + (y-\varepsilon)^2} v(t + i\varepsilon) d\lambda(t) \\
\text{(Konsistenz Lemma)} \quad &= v(z) \\
&= \Im f(z).
\end{aligned}$$

Damit ist also die Boreltransformation von ν eindeutig bestimmt und damit (wie schon oben diskutiert) ist auch ν eindeutig festgelegt.

Es bleibt (!) zu zeigen. Das folgt durch eine direkte Abschaetzung: Sei $q = y - \varepsilon$ und $r = y$ und $s = (E - t)^2$. Dann gilt

$$\left|\frac{q}{s + q^2} - \frac{r}{s + r^2}\right| = |q - r|\frac{|s - qr|}{(s + q^2)(s + r^2)} \leq |q - r|\frac{1}{s + q^2}.$$

Fuer $0 < \varepsilon < y/2$ sieht man leicht, dass der letzte Term (wegen $s > 0$) durch $4\varepsilon/y^2$ abgeschaetzt werden kann. $\square$

4. Wie man es auch sehen kann

In letzten Abschnitt haben wir gewisse analytischen Funktionen auf $\mathbb{C}^+$ untersucht. Wir haben gezeigt, daß die Randwerte dieser Funktionen auf $\mathbb{R}$ existieren und durch ein Maß gegeben sind und wir haben gesehen, daß die Umkehrung der Randwertbildung durch die Boreltransformation gegeben ist. Tatsaechlich brauchten wir zur Randwertbildung gar nicht die vollstaendige Funktion sondern nur ihren Imaginaerteil. Schematisch kann man das so darstellen:

$$F \text{ auf } \mathbb{C}^+ \xrightarrow{\Im} v = \Im F \xrightarrow{\text{Randwert}} \mu = \mu_v \xrightarrow{\text{Boreltransformation}} \mathcal{R}\mu = F.$$

Es ist also die Boreltransformation $\mathcal{R}$ gerade die Umkehrung der Abbildung

$$\text{Randwert} \circ \Im.$$

In diesem Abschnitt werfen wir einen zweiten Blick auf die einzelnen Schritte in obigem Schema. Insbesondere werden wir dabei folgende Gesichtspunkte in den Mittelpunkt ruecken:

- Die Real- bzw. Imaginaerteile von holomorphen Funktionen sind gerade die harmonischen Funktionen. (In diesem Sinne sind also die Saetze des vorigen Abschnittes Saetze ueber Randwerte von harmonischen Funktionen.)
- Es gibt eine biholomorphe Abbildung zwischen $\mathbb{C}^+$ und $\mathbb{D}$, die eine Abbildung zwischen $\mathbb{R} \cup \{\infty\} = \partial\mathbb{C}^+$ und $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ induziert. (Damit lassen sich Saetze ueber Randwerte auf $\mathbb{C}^+$ auch als Saetze ueber Randwerte auf $\mathbb{D}$ auffassen und umgekehrt.)

Wir werden dabei einiges ueber harmonische Funktionen lernen und wir werden sehen, daß die Boreltransformation der 'Poissontransformation' entspricht. Tatsaechlich ermoeglicht es uns dieser Zugang noch eine Verallgemeinerung des Satzes von Herglotz zu beweisen.

Offenbar kann man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ idenfifizieren via

$$\iota : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ z = x + iy \mapsto (x, y).$$

Damit kann man dann auch die offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$ mit der offenen Teilmengen $\widetilde{U} := \iota(U)$ von $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Einer Funktion

$$w : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

entspricht dann die Funktion

$$\widetilde{w} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R},\ \widetilde{w}(x, y) = w(x + iy).$$

Damit entspricht einer Funktion

$$f : U \longrightarrow \mathbb{C}, f(z) = u(z) + iv(z)$$

mit reellwertigen $u, v : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dann die Funktion

$$\widetilde{f} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \widetilde{f}(x,y) = (\widetilde{u}(x,y), \widetilde{v}(x,y)) = (u(x+iy), v(x+iy)).$$

Es ist ein solches f in $z_0 = x_0 + iy_0$ komplex differenzierbar genau dann, wenn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f^{'}(z_0) = a + ib$$

existiert d.h. wenn f in z_0 gut durch die lineare Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, w \mapsto= (a+ib)w = a\Re w - b\Im w + i(b\Re w + a\Im w)$$

approximiert wird. In diesem Fall ist die Funktion $\widetilde{F}$ differenzierbar und wird gut durch die Abbildung

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} aw_1 - bw_2 \\ bw_1 + aw_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

approximiert.
Es ist also f genau dann in $z_0 = x_0 + iy_0$ komplex differenzierbar mit Ableitung $a + ib$, wenn $\widetilde{f}$ in (x_0, y_0) differenzierbar ist mit Ableitung

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung von $\widetilde{f}$ hat also eine sehr spezielle Struktur. Es ist genau diese Struktur, die fuer alle speziellen Eigenschaften von holomorphen Funktionen (verglichen mit beliebigen differenzierbaren Funktionen von Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$) verantwortlich ist. Wir halten dazu folgendes fest:

Proposition (Cauchy-Riemann Differentialgleichungen). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv : U \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben und $\widetilde{f} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \widetilde{f} = (\widetilde{u}, \widetilde{v})$ entsprechend assoziiert. Dann ist f holomorph genau dann, wenn die Komponenten von $\widetilde{f}$ die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen*

$$\widetilde{u}_x = \widetilde{v}_y,\ \widetilde{v}_x = -\widetilde{u}_y$$

erfuellen.

Folgerung (Harmonizitaet von Real- und Imaginarteil). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv : U \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben und $\widetilde{f} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \widetilde{f} = (\widetilde{u}, \widetilde{v})$ entsprechend assoziiert. Dann sind $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ zweimal stetig differenzierbar mit*

$$0 = \widetilde{u}_{xx} + \widetilde{u}_{yy} \text{ und } 0 = \widetilde{v}_{xx} + \widetilde{v}_{yy}.$$

Beweis. Das folgt direkt aus den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen, etwa fuer $\widetilde{u}$:

$$\widetilde{u}_{xx} + \widetilde{u}_{yy} = (\widetilde{u}_x)_x + (\widetilde{u}_y)_y = (\widetilde{v}_y)_x + (-\widetilde{v}_x)_y = 0.$$

Hier verwenden wir im letzten Schritt den Satz von Schwarz. Entsprechendes gilt fuer $\widetilde{v}$. □

Die in der Folgerung auftretenden Funktionen haben einen eigenen Namen.

Definition (Harmonisch). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen. Eine Funktion $w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn sie zweimal stetig differenzierbar ist mit*

$$0 = w_{xx} + w_{yy} =: \Delta w.$$

Notation. Wir werden im folgenden (oft) stillschweigend $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ identifizieren und dann auch nicht mehr zwischen f und $\widetilde{f}$ bzw. zwischen u und $\widetilde{u}$ und v und $\widetilde{v}$ unterscheiden.

Auf schoenen Mengen Ω gilt auch die Umkehrung der vorangehenden Folgerung d.h. die harmonischen Funktionen sind genau die Real- oder Imaginaerteile von holomorphen Funktionen.

Theorem (Harmonische Funktionen als Real- bzw. Imaginaerteil holomorpher Funktionen). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und einfach zusammenhaengend. Sei $w : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist w harmonisch.*
(ii) *Es ist w der Realteil einer holomorphen Funktion (d.h. es gibt eine holomorphe Funktion f mit $w = \widetilde{\Re f}$).*
(iii) *Es ist w der Imaginaerteil einer holomorphen Funktion (d.h. es gibt eine holomorphe Funktion f mit $w = \widetilde{\Im f}$).*

Bemerkung. Wir erinnern uns, daß eine Menge einfach zusammenhaengend heißt, wenn jede geschlossenen Kurve auf einen Punkt zusammengezogen werden kann (siehe vorigen Abschnitt fuer Diskussion). Damit sind also inbesondere alle konvexen Mengen einfach zusammenhaengend. Wichtige Beispiele sind die obere Halbebene und die Einheitskugel. Fuer uns werden keine weiteren Beispiele eine Rolle spielen.

Bonusmaterial

Beweis. (iii)$\Longleftrightarrow$ (ii): Offenbar ist f genau dann holomorph, wenn $-if$ holomorph ist und es gilt $\Re(f) = \Im(-if)$.

(ii)$\Longrightarrow$(i): Das haben wir schon gezeigt (und dazu ist es gar nicht noetig, daß Ω einfach zusammenhaengend ist).

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Aufgrund der Charakterisierung holomorpher Funktionen mittels Cauchy-Riemannscher Differentialgleichungen reicht es eine Funktion v zu finden, so daß das Paar (w, v) die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfuellt d.h. so daß gilt

$$v_x = -w_y, \text{ und } v_y = w_x.$$

Definiert man das Vektorfeld

$$F = (F_1, F_2) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ durch } F = (-w_y, w_x)$$

geht es also darum ein v zu finden mit

$$\nabla v = F.$$

Aus Analysis III kennen wir fuer einfach zusammenhaengende Gebiete eine (notwendige und) hinreichende Bedingung, dafuer daß ein Vektorfeld $F = (F_1, F_2)$ ein Gradientenfeld ist, naemlich

$$\partial_y F_1 = \partial_x F_2.$$

Im vorliegenden Fall (mit $F_1 = -w_y$, $F_2 = w_x$) liefert dies die Bedingung

$$-w_{yy} = w_{xx}.$$

Das ist aber gerade die Harmonizitaet von w. $\square$

Ende des Bonusmaterial

Bemerkung. Das vorige Theorem ist von großer stuktureller Relevanz. Es bedeutet, daß alle Aussagen ueber Imaginaerteile von holomorphen Funktionen aus dem vorigen Abschnitt auch verstaenden werden koennen als Aussagen ueber harmonische Funktionen.

Ende der 17. Vorlesung

Fuer spaeter halten wir auch noch folgende bemerkenswerte Eigenschaft holomorpher Funktionen fest.

Lemma (Realteil bestimmt Imaginaerteil und umgekehrt). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhaengend und seien $f, g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $\Re f = \Re g$. Dann gilt $f - g =$ konstant.*

Beweis. Betrachte die holomorphe Funktion $h = f - g$. Dann gilt $\Re h = 0$. Damit folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgelichungen, daß die partiellen Ableitungen von $\Im h$ alle verschwinden. Damit ist $\Im h$ konstant (nach Saetzen der Analysis II). $\square$

Aus Analysis III kennen wir folgende Charakterisierung harmonischer Funktionen.

Theorem (Charakterisierung harmonischer Funktionen via Mittelwerteigenschaft). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann sind die folgenden Aussagen aequivalent:*

(i) *Es ist u harmonisch auf Ω.*
(ii) *Es hat u die Mittelwerteigenschaft bzgl. Kugeln d.h. es gilt*

$$u(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y)dy$$

fuer alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_r(x) \subset \Omega$.

Bemerkungen.

- Man beachte, daß die Funktion u erst einmal nur als stetig vorausgesetzt wird. Die Aussage (ii) impliziert also inbesondere, daß u zweimal stetig differenzierbar ist. Das mag auf den ersten Blick sehr verblueffend erscheinen. Allerdings ist die rechte Seite in (ii) als eine Art Faltung recht glatt.
- Es gibt auch eine Charakterisierung von harmonischen Funktionen durch eine Mittelwerteigenschaft bzgl. Kreislinien.

Wir kommen nun zu einer sehr nuetzlichen Eigenschaft von harmonischen Funktionen, dem Maximumprinzip. Sinngemaess besagt dieses, daß harmonische Funktionen Minimum und Maximum auf dem Rand ihres Definitionsbereiches annehmen. In der praezisen Formulierung gibt es verschiedene Varianten. Wir stellen einige vor.

THEOREM (Maximumsprinzip / Minimumsprinzip). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhaengend und $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch. Gibt es ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) \geq u(x)$ (bzw. $u(x_0) \leq u(x)$) fuer alle $x \in \Omega$, so ist u konstant.*

Beweis. Aufgrund der Mittelwerteigenschaft gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(y)dy$$

fuer alle $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subset \Omega$. Mit der Stetigkeit von u und aufgrund von $u(x_0) \geq u(x)$ folgt dann, daß u auf ganz $B_r(x_0)$ konstant ist. Da Ω zusammenhaengend ist, folgt nun, daß u konstant ist. (Waehle zu einem beliebigen Punkt $x \in \Omega$ eine Kurve die x_0 und x verbindet und ueberdecke diese Kurve zukzessive durch Kugeln auf denen u konstant ist.) □

FOLGERUNG. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ relativ kompakt und $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und harmonisch auf Ω. Dann nimmt u Minimum und Maximum auf dem Rand von Ω an.*

Beweis. Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge, nimmt u Maximum und Minimum an. Wir unterscheiden zwei Faelle:

Fall 1: Es nimmt u weder Maximum noch Minimum in Ω an. Dann ist nichts mehr zu zeigen.

Es gibt einen Punkt x_0 in Ω, in dem u Maximum oder Minimum annimmt. Dann ist - nach dem vorigen Theorem - u also konstant auf der Zusammenhangskomponente von x_0. Damit nimmt es dann auf dem Rand dieser Komponente Maximum bzw. Minimum an. □

Wir stellen auch noch folgende Variante des Minimumprinzips (und der Folgerung) vor.

THEOREM (Variante Maximumprinzip). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhaengend und $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch mit*

$$\liminf_n u(z_n) \leq 0$$

fuer jede Folge (z_n) in Ω, die gegen einen Randpunkt von Ω konvergiert oder $|z_n| \to \infty$ erfuellt. Dann gilt $u \leq 0$. Insbesondere gilt also $u = 0$ falls $\lim_n u(z_n) = 0$ fuer jede Folge der angegebenen Art.

Bemerkungen. (a) Die betrachteten Folgen (z_n) sind genau diejenigen, die gegen einen Randpunkt von Ω in der Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^2$ konvergiert. In dieser Einpunktkompaktifizierung wird naemlich gerade ein Punkt ∞ hinzugefuegt und eine Folge (z_n) konvergiert gegen diesen Punkt genau dann, wenn sie jedes Kompaktum verlaesst.

(b) Die Voraussetzung $\liminf_n u(z_n) \leq 0$ kann man so verstehen, daß alle 'Randwerte' von u nicht positiv sind.

(c)Anschaulich ist die Aussage klar: Das Maximumprinzip besagt sinngemaess, daß u das Maximum an Rand annimmt. Nach der Vorrausetzung sind die 'Randwerte' von u am Rand alle nicht positiv. Damit ist u dann insgesamt nicht positiv.

Beweis. Angenommen: $u(x_0) > 0$ fuer ein $x_0 \in \Omega$. Dann gilt also

$$S := \sup u > 0.$$

(Hier ist der Wert $S = \infty$ erlaubt.) Die Voraussetzung $\liminf_n u(z_n) \leq 0$ liefert nun, daß u nicht konstant ist.

Waehle nun eine Folge (z_n) in Ω mit $u(z_n) \to S$. Wir unterscheiden zwei Faelle:

Fall 1: Es hat (z_n) eine beschraenkte Teilfolge. Dann koennen wir ohne Einschraenkung annehmen, daß (z_n) selber beschraenkt ist. Damit koennen wir ohne Einschraenkung annehmen, daß z_n gegen ein z konvergiert. Dieses z muß zum Rand von Ω gehoeren (sonst waere u nach dem Maximumprinzip konstant). Damit folgt aber aufgrund der Voraussetzung an die Randwerte von u

$$0 \geq \liminf_n u(z_n) = S > 0$$

Fall 2: Es hat (z_n) keine beschraenkte Teilfolge. Dann gilt also $|z_n| \to \infty$. Damit folgt wieder aufgrund der Voraussetzung

$$0 \geq \lim n f_n u(z_n) = S > 0.$$

Das ist ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung. Die vorige Variante des Maximumprinzip liefert einen alternativen Beweis (und sogar eine Verallgemeinerung) des Konsistenzlemma aus dem vorigen Abschnitt. Genauer gilt folgendes: Sei $v : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und v habe stetige Randwerte $v(\cdot + i0)$ (d.h. eine stetige Fortsetzung auf $\overline{\mathbb{C}^+}$) mit $v(\cdot + i0) \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ und es gelte $v(z) \to 0$ fuer $|z| \to \infty$. Dann ist mit $\mu = v(\cdot + i0)\lambda$ die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - z} d\mu(t) =: \mathcal{R}\mu$$

holomorph mit $\Im f = v$. (Man beachte, daß hier die Boreltransformation von positiven Maßen auf komplexe Maße fortgesetzt wurde.)

Beweisskizze. Wegen $v(\cdot + i0) \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ ist μ ein komplexes Maß und es existiert die Boreltransformation $\mathcal{R}\mu$ und ist holomorph. Damit ist dann $w = \Im f$ harmonisch. Weiterhin hat w als Randwert gerade die Funktion $v(\cdot + i0)$ (wie man mit genau den oben fuer die Boreltransformation gemachten Schluessen sieht). Betrachte nun die Differenz $D := w - v$. Dann gilt:

- D ist harmonisch als Differenz zweier harmonischer Funktionen.
- Randwerte von D sind Null. (Klar auf $\mathbb{R}$ da dort die Randwerte von w und von v uebereinstimmen; Fuer ∞ sind sowohl der Randwert von w als auch von v gerade 0).

Damit folgt aus der vorigen Variante des Maximumprinzip sofort $D = 0$. Das ist die gewuenschte Behauptung.

Wir zeigen nun noch eine Invarianzeigenschaft von harmonischen Funktionen auf verschiedenen Gebieten.

THEOREM (Invarianz der Menge der harmonischen Funktionen unter holomorphen Transformationen). *Seien Ω_1, Ω_2 offen und $g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ sei* *holomorph. Ist $u : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, so ist auch $u \circ g : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch.*

Bemerkung. Setzt man g als biholomorph (d.h. bijektiv und holomorph mit holomorpher Inversen), so ergibt sich gerade eine Bijektion zwischen den harmonischen Funktionen auf Ω_1 und denen auf Ω_2.

Beweis. Das folgt durch direkte Rechnung unter Nutzen der Cauchy-Riemann Differentialgleichungen. Hier sind die Details: Seien p, q der Real- bzw. Imaginaerteil von g d.h. $g = p + iq$. Dann gilt nach Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen also

$$p_x = q_y,\ p_y = -q_x.$$

Damit folgt

$$(*) \qquad q_y p_y = -q_x p_x,$$

$$(**) \qquad q_y^2 = p_x^2,\ p_y^2 = q_x^2, \text{ also } p_x^2 + p_y^2 = q_y^2 + q_x^2,$$

sowie

$$(***) \qquad p_{xx} + p_{yy} = 0 \text{ und } q_{xx} + q_{yy} = 0.$$

Setze

$$h(x, y) := u \circ g(x, y) = u(p(x, y), q(x, y)).$$

Bezeichnet man die Ableitungen von u nach der ersten Koordinate mit u_1 und nach der zweiten Koordinate mit u_2 so gilt also:

$$\partial_x h = u_1 \circ g p_x + u_2 \circ g q_x,$$

$$\begin{aligned} \partial_{xx} h &= u_{11} \circ g p_x^2 + u_{12} \circ g q_x p_x + u_1 \circ g p_{xx} \\ &+ u_{21} \circ g q_x p_x + u_{22} \circ g q_x^2 + u_2 \circ g q_{xx}. \end{aligned}$$

Entsprechend folgt, indem man x durch y ersetzt, sofort

$$\begin{aligned} \partial_{yy} h &= u_{11} \circ g p_y^2 + u_{12} \circ g q_y p_y + u_1 \circ g p_{yy} \\ &+ u_{21} \circ g q_y p_y + u_{22} \circ g q_y^2 + u_2 \circ g q_{yy}. \end{aligned}$$

Addiert man nun $\partial_{xx} h$ und $\partial_{yy} h$, so

- addieren sich die Terme mit den ersten Ableitungen u_1 bzw. u_2 aufgrund von $(***)$ zu Null,
- heben sich die Terme mit den gemischten Ableitungen $u_{12} = u_{21}$ aufgrund von $(*)$ gerade gegenseitig weg,
- addieren sich die Terme mit den zweiten Ableitungen aufgrund von $(**)$ und der Harmonizitaet von u gerade zu Null.

Damit folgt insgesamt also

$$\Delta h = 0.$$

Das ist die gewuenschte Aussage. □

Bonusmaterial

Bemerkung. Alternativ kann man auch folgenden Beweis geben: Harmonizitaet ist eine lokale Eigenschaft. Es reicht also, dies in offenen Umgebungen von Punkten zu zeigen. Damit kann man ohne Einschraekung annehmen, daß $\Omega_{1,2}$ einfach zusammenhaengend sind (waehle Ω_1 als offene Kugel und Ω_2 als Bild von Ω_1 unter g). Damit ist dann also u gerade der Realteil einer holomorphen Funktion f. Daher ist dann $u \circ g$ gerade der Realteil von $f \circ g$.

Da f und g holomorph sind, ist auch $f \circ g$ holomorph. Damit ist dann auch der Realteil $u \circ g$ von $f \circ g$ harmonisch.

Ende des Bonusmaterial

Das vorige Theorem besagt, daß vom Standpunkt der harmonischen Funktionen man Gebiete nicht unterscheiden kann, die biholomorph zueinander sind. Wir werden das nun in einem Spezialfall naeher in Augenschein nehmen. Dabei wird das eine Gebiet gegeben sein durch

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\} \text{ mit Rand } \partial\mathbb{C}^+ = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

und das andere Gebiet durch

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \text{ mit Rand } \partial\mathbb{D} = \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Damit kommen wir nun also zum zweiten in der Einleitung des Abschnittes genannten Gesichtspunkts.

Proposition (Biholomorphie von $\mathbb{C}^+$ und $\mathbb{D}$). *Die Abbildung*

$$\mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{D}, z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

ist bijektiv und holomorph mit holomorpher Inversen gegeben durch

$$\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^+, w \mapsto \frac{w+1}{iw-i1}.$$

Sie induziert eine bijektive stetige Abbildung des Randes $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf $\mathbb{T}$.

Beweis. Das folgt durch direkte Rechnung. □

Ende der 18. Vorlesung

Bonusmaterial

Die auf den Raendern induzierten Abbildungen lassen sich leicht ausrechnen (vgl. auch die Betrachtungen weiter unten). Es handelt sich zum einen um

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}, r \mapsto \frac{r-i}{r+i} = \frac{r^2 - 1 - 2ri}{1 + r^2}.$$

Diese Abbildung bildet 0 ab auf -1 und die negative Halbachse auf den oberen Kreisbogen von -1 nach 1 und die positive Halbachse auf den unteren Kreisbogen von -1 nach 1 und den Punkt ∞ auf 1. Zum anderen geht es um die Umkehrabbidlung dieser Abbildung. Diese ist gegeben durch

$$w \mapsto \frac{w+1}{iw-i1}$$

fuer $w \in \mathbb{T}$. Identifiziert man $\mathbb{T}$ mit $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ via $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$, so ergibt sich die Abbildung

$$\theta \mapsto \frac{e^{i\theta}+1}{i(e^{i\theta}-1)} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}{i(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})} = -\cot(\frac{\theta}{2}).$$

(Man beachte, daß die angegeben Ausdruecke tatsaechlich auf $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ wohldefiniert sind (da $e^{i\cdot}$ gerade 2π periodisch ist und cot periodisch mit Periode π ist). Hier ist cot auf 0 gerade definiert durch ∞.

Ende des Bonusmaterial

Mittels der angegebenen Entsprechung von $\mathbb{C}^+$ und $\mathbb{D}$ bzw. der Raender $\mathbb{R}$ und $\mathbb{T}$ ist es moeglich die

$$\text{Boreltransformation} : \text{Maße auf } \mathbb{R} \longrightarrow \text{Holomorphe Funktionen auf } \mathbb{C}^+$$

zu einer Abbildung

$$\text{Poissontransformation : Maße auf } \mathbb{T} \longrightarrow \text{Holomorphe Funktionen auf } \mathbb{D}$$

in Beziehung zu setzen. Dem gehen wir nun nach. Sei μ ein endliches positives Maß auf $\mathbb{R}$ mit Boreltransformation $\mathcal{R}\mu$. Tatsaechlich betrachten wir eine leicht verschobenen Variante der Boreltransformation. Genauer untersuchen wir nun die um

$$b_\mu = \int \frac{\lambda}{1+\lambda^2} d\mu(\lambda) \in \mathbb{R}$$

verschobene Funktion $F = \mathcal{R}\mu - b_\mu$. Diese Verschiebung ist an dieser Stelle nicht unbedingt naheliegend. Sie wird aber auf das bekannte Objekt des Poissonkernes fuehren. Auch beachte man, daß sie den Imaginaerteil von $\mathcal{R}\mu$ nicht aendert. Es handelt sich also in diesem Sinne um eine 'harmlose' Normalisierung. Wir erinnern noch an die Konstruktion des Bildmaßes: Seien X, Y meßbare Raeume. Dann induziert jede meßbare Abbildung $A : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung von Maßen auf X auf Maße auf Y via

$$\varrho \mapsto A(\varrho) \text{ mit } \int_Y h dA(\varrho) = \int_X h \circ A d\varrho.$$

Damit koennen wir nun rechnen:

$$\begin{aligned}
F(z) = \mathcal{R}\mu - b_\mu &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) d\mu(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{z\lambda + 1}{(\lambda - z)(1+\lambda^2)} d\mu(\lambda) \\
(\nu := \frac{1}{1+\lambda^2}\mu) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{z\lambda+1}{\lambda - z} d\nu(\lambda)
\end{aligned}$$

Setze $S : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \theta \mapsto -\cot\frac{\theta}{2},\ T = S^{-1}), \ \ \sigma = T(\mu)$

$$\begin{aligned}
&= \int_{(0,2\pi)} \frac{-z\cot\frac{\theta}{2} + 1}{-\cot\frac{\theta}{2} - z} d\sigma(\theta) \\
(z = \frac{w+1}{i(w-1)}) &= \int_{(0,2\pi)} \frac{(w+1)\cot(\theta/2) - i(w-1)}{(w+1)\cot(\theta/2) + i(w-1)} d\sigma(\theta) \\
&= \int_{(0,2\pi)} \frac{(w+1)\cos(\theta/2) - i(w-1)\sin(\theta/2)}{(w+1)\cos(\theta/2) pi(w-1)\sin(\theta/2)} d\sigma(\theta) \\
&= i \int_{(0,2\pi)} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} d\sigma(\theta).
\end{aligned}$$

Hier nutzen wir im letzten Schritt die Eulerschen Formeln fuer $\sin(\theta/2)$ und $\cos(\theta/2)$ und Erweitern mit $e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Bemerkung. Man beachte, daß das Maß σ in der Tat das Bildmaß von ν unter der durch die oben genannte Abbildung von $\mathbb{C}^+$ nach $\mathbb{D}$ induzierten Randabbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{T}$ ist.

Um das nun naeher beleuchten zu koennen, fueheren wir die *Poissontransformation*

$$\mathcal{P} : \text{Komplexe Maße auf } \mathbb{T} \longrightarrow \text{holomorphe Funktionen auf } \mathbb{D},$$

$$\mathcal{P}\sigma(w) := \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w} d\sigma(\theta),$$

ein.

Bemerkungen.

- Die Bezeichnung 'Poissontransformation' ist nicht standard.
- Man beachte, daß in der Tat $\mathcal{P}\sigma$ eine holomorphe Funktion ist (nach einem aehnlichen Argument wie wir es fuer $\mathcal{R}\mu$ gegeben haben).

Dann koennen wir also die obige Rechnung so zusammenfassen:

$$\mathcal{R}\mu(z) - b_\mu = i\mathcal{P}\sigma(w).$$

Dabei ist $z = (w+1)/(i(w-1))$ und σ ist das Bildmaß von $\frac{1}{1+\lambda^2}\mu(\lambda)$ unter der Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{D}$.

Insbesondere gilt also (da b_μ reell ist) dann

$$\Im \mathcal{R}mu(z) = \Re\mathcal{P}\sigma(w) = \int_{\mathbb{T}} \Re\left(\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\right) d\sigma(\theta).$$

Man definiert nun den *Poissonkern* durch

$$P_r(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \Re\left(\frac{e^{i\theta}+r}{e^{i\theta}-r}\right) = \frac{1-r^2}{1+2r\cos(\theta)+r^2} = P_r(-\theta)$$

(fuer $0 \leq r < 1$ und $\theta \in \mathbb{T}$).

Bemerkung. Diese Bezeichnung ist Standard und die angegebenen Gleichheiten lassen sich durch relativ direkte Rechnungen nachpruefen.

Damit gilt dann also fuer $w = re^{it}$, $z = (w+1)/(i(w-1))$

$$\Im\mathcal{R}\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} P_r(t-\theta) d\sigma(\theta) = P_r * \sigma(\theta).$$

Die **Philosophie** der folgenden Betrachtungen ist nun, daß die Familie P_r, $r \to 1$, bei der Untersuchung von Maßen auf $\mathbb{T}$ eine aehnliche Rolle spielt wie die Familie p_ε, $\varepsilon \to 0$, bei der Untersuchung von Maßen auf $\mathbb{R}$, gemaeß

μ auf $\mathbb{R}$ induziert $\mathcal{R}\mu(z) = \int \frac{1}{t-z} d\mu$ mit $\Im\mathcal{R}\mu(x+i\varepsilon) = p_\varepsilon * \mu(x)$

σ auf $\mathbb{T}$ induziert $\mathcal{P}\sigma = \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w} d\sigma(\theta)$ mit $\Re\mathcal{P}\sigma(re^{it}) = P_r * \sigma(t)$.

Tatsaechlich liefert die Famlie $P_r(\theta)$ eine 'δ-Folge in folgendem Sinne:

- $P_r(\theta) > 0$ und $P_r(\theta) = P_r(-\theta)$ fuer alle $0 \leq r < 1$ und $\theta \in \mathbb{T}$.
- $\int_{\mathbb{T}} p_r(t) = 1$ fuer alle $0 \leq r < 1$.
- $\lim_{r\to 1} P_r(\theta) = 0$ fuer alle $\theta \neq 0$.

(Hier folgt der erste Punkt sofort aus der Darstellung von P_r mittels cosinus und der zweite Punkt mittels der Reihendarstellung und der dritte Punkt aus der Darstellung mittels cosinus.)

Damit koennen wir nun die Poissontransformation ganz aehnlich wie die Boreltransformation untersuchen. Wir fuehren das an einer Reihe von Aussagen vor.

Lemma (Konsistenzlemma). *Sei $u : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und harmonisch auf $\mathbb{D}$ und $\sigma = u(e^{i\theta} d\theta$. Dann ist*

$$f = \mathcal{P}\sigma : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w} d\sigma(\theta)$$

holomorph mit $\Re f = u$.

Beweis. Wir wissen schon, daß die Poissontransformation eine holomorphe Funktion liefert. Die angegebenen Eigenschaften von P_r liefern (zusammen mit der Stetigkeit von u), daß der Randwert von $\Re f$ gerade u ist (vgl. entsprechende Aussagen fuer die Boreltransformation). Damit ist dann also die Differenz $D = u - \Re f$ eine harmonische Funktion auf $\mathbb{D}$, die auf dem Rand von $\mathbb{D}$ verschwindet. Nach dem Maximumprinzip folgt also $D = 0$ und damit $u = \Re f$. $\square$

Theorem (Charakterisierung positiver harmonischer Funktionen auf $\mathbb{D}$ durch Maße). *Sei u eine positive harmonische Funktion auf $\mathbb{D}$. Dann gibt es ein eindeutiges positives Maß σ auf $\mathbb{T}$ mit*

$$u(re^{i\theta}) = P_r * \sigma(\theta)$$

fuer alle $0 \leq r < 1$ *und* $\theta \in \mathbb{T}$.

Bemerkung. Wegen $P_r * \sigma = \Re\mathcal{P}\sigma$ und der Harmonizitaet des Realteiles holomorpher Funktionen ist die Umkehrung der Aussage klar. Damit liefert das Theorem in der Tat eine Charakterisierung.

Beweis. Definiere die Maße σ_r auf $\mathbb{T}$ via $\sigma_r := u(re^{i\theta})d\theta$ fuer $0 \leq r < 1$.

Eindeutigkeit. Zeige $\sigma_r \overset{vage}{\to} \sigma$ falls $u = P_r\sigma$: Das folgt wie die entsprechende Aussage zur Boreltransformation.

Existenz. Zeige, daß die Folge der Maß σ_r schwache Grenzwerte hat und alle diese uebereinstimmen. Das folgt wie die entsprechende Aussage zur Boreltransformation. Um das Uebereinstimmen aller Grenzewerte zu zeigen, nutze man - analog zu den Betrachtungen zur Boreltransformation - das vorangehende Konstistenzlemma. $\square$

Bemerkung. Anders als bei den Betrachtungen zur Boreltransformation benoetigen wir hier keinerlei Beschraenktheitsvoraussetzungen an u. Tatsaechlich wird uns das erlauben das oben gegebene Theorem von Herglotz noch einmal zu verallgemeinern (s.u.).

Theorem (Charakterisierung holomorpher Funktionen mit positivem Realteil durch Maße). *Sei G eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{D}$ mit positivem Realteil. Dann gibt es ein eindeutiges Maß σ auf $\mathbb{T}$ und eine eindeutige reelle Zahl α mit*

$$G = \mathcal{P}\sigma + i\alpha.$$

Beweis. Existenz. Es ist $\Re G$ harmonisch und positiv. Damit folgt aus dem vorigen Theorem die Existenz eines eindeutigen Maß σ auf $\mathbb{T}$ mit

$$\Re G = P_r * \sigma = \Re\mathcal{P}\sigma.$$

Dann sind also G und $\mathcal{P}\sigma$ holomorphe Funktionen mit gleichem Realteil. Damit stimmen sie (nach einem obigen Lemma) bis auf eine (imaginaere) Konstante ueberein.

Eindeutigkeit. Ist σ ein solches Maß, so gilt $\Re G = P_r * \sigma$ und in einer solche Darstellung ist σ eindeutig nach dem vorigen Theorem. Damit ist dann auch α eindeutig. $\square$

Als Anwendung koennen wir eine Verallgemeinerung des Theorems von Herglotz beweisen.

THEOREM (Herglotz$^+$). *Sei $F : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}^+$ holomorph. Dann gibt es eindeutige $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$ und μ positives Maß auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} d\mu(x) < \infty$ mit*

$$F(z) = az + b + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\mu(t).$$

Dabei sind a, b gegeben durch

$$b = \Re F(i),\ a = \lim_{y\to\infty} \frac{F(iy)}{iy}$$

und μ ist durch die Stieltjes-Umkehrformel gegeben als

$$\mu((s,t]) = \lim_{\delta\to 0+} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{(s+\delta,t+\delta]} \Im F(E+i\varepsilon) d\lambda(E).$$

Beweis. Die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage folgt aus dem vorigen Theorem unter Nutzen der oben angegebenen biholomorphen Abbildung von $\mathbb{C}^+$ nach $\mathbb{D}$.

Die angegebenen Formeln fuer a und b folgen dann einfach durch eine direkte Rechnung. Die Formel fuer μ (fuer beschraenktes μ und $s = -\infty$) wurde oben schon bewiesen. Der dort gegebenen Beweis laesst sich leicht an die vorliegende Situation anpassen.

□

Bemerkungen.

- Das Theorem behandelt allgemeinere als die im vorigen Abschnitt betrachteten holomorphen Funktionen , da keinerlei Beschraenktheitseigenschaften von F gefordert werden. Dafuer werden die auftretenden Maße im allgemeinen auch nicht mehr beschraenkt sein, sondern lediglich die Beschaenktheitseigenschaft $\int \frac{1}{1+t^2} d\mu(t) < \infty$ haben und es ist eine Normierung durch Subtrahieren des entsprechenden Termes im Integral noetig.
- Setzt man zusaetzlich die Beschraenktheit von $z \mapsto \Im F(z)\Im z$ voraus, so folgt fuer $z = iy$ dann Beschraenktheit von

$$y\Im F(iy) = ay^2 + \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{t^2+y^2} d\mu(t)$$

fuer $y \to \infty$. Das impliziert $a = 0$ und $\mu(\mathbb{R}) < \infty$. Setzt man nun sogar die Beschraentheit von $z \mapsto F(z)\Im z$ voraus, so folgt aus dem schon gezeigeten $\mu(\mathbb{R}) < \infty$ und der Beschraenktheit von $\Re F(z)\Im z$ dann die Beschraenktheit von

$$y\Re F(iy) = y\left(b - \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{1+t^2} d\mu(t)\right) + \int_{\mathbb{R}} \frac{ty}{t^2+y^2} d\mu(t)$$

fuer $y \to \infty$. Offenbar ist der zweite Term beschraenkt (wegen $ty \leq t^2 + y^2$). Damit folgt dann

$$b = \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{1+t^2} d\mu(t).$$

In diesem Fall vereinfacht sich die oben gegebene Darstellung also zu

$$F = \mathcal{R}\mu.$$

Damit ist das angegebenen Theorem in der Tat allgemeiner als der Satz von Herglotz.

- Es entspricht das α aus dem vorigen Theorem gerade dem b.
- Es ist der Wert von a gerade der Punktanteil von σ bei $1 \in \mathbb{T}$. Aus diesem Grunde gilt auch $a = 0$, wenn es sich um Maße auf $\mathbb{R}$ (anstatt auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$) handelt. Denn es wird $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ abgebildet.

KAPITEL 3

Bemerkung zum Spektralsatz

In diesem Abschnitt diskutieren wir, wie sich aus den Betrachtungen zur Boreltransformation die Spektralmaße eines Selbstadjungierten Operator ergeben. Wir skizzieren dann auch kurz, wie man damit den Spektralsatz beweist.

Sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ d.h. A ist eine lineare Abbildung von einem dichten Unterrraum $D(A) \subset \mathcal{H}$ (dem Definitionsbereich von A) nach $\mathcal{H}$ und es gilt $A^* = A$. Hier ist der adjungierte A^* von A definiert durch

$$D(A^*) = \{x \in \mathcal{H} : \text{es existiert } x^* \in \mathcal{H} \text{ mit } \langle x^*, y\rangle = \langle x, Ly\rangle \text{ fuer alle } y \in D(A)\}$$

und die Aktion von A^* durch

$$A^*x = x^*.$$

Fuer den selbstadjungierten Operator A und $x \in D(A)$ gilt dann also

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle \in \mathbb{R}.$$

(Hier folgt die erste Gleichung direkt aus der Definition von A^* und $A = A^*$. Der Term ist reell wegen $\langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$.) Insbesondere gilt fuer den selbstadjungierten Operator A und $a \in \mathbb{R}$ dann

$$\langle (A-a)x, x\rangle = \langle x, (A-a)x\rangle \in \mathbb{R}$$

fuer jedes $x \in D(A)$. Damit folgt nach einer kleinen Rechnung sofort fuer $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

$$\|(A-z)x\|^2 = \|((A-a)+ib)x\|^2 = \|(A-a)x\|^2 + |b|^2\|x\|^2.$$

(Da die gemischten Terme $ib\langle (A-a)x, x\rangle$ und $-ib\langle x, (A-x)x\rangle$ sich gegenseitig wegheben.) Insbesondere ergibt sich fuer ein solches $z = a + ib$ mit $b \neq 0$ also

$$(*) \quad \|(A-z)x)\| \geq |\Im z|\|x\|$$

und damit ist $A - z$ also injektiv. Tatsaechlich ist $(A - z)$ dann auch surjektiv. (Denn aufgrund der Ungleichung $(*)$ ist das Bild von $A - z$ offenbar abgeschlossen. Weiterhin zeigt man leicht

$$(\text{Bild von (A-z)})^\perp = \text{Kern von } (A-z)^*.$$

Mit $(A - z)^* = A - \overline{z}$ folgt aus einer weiteren Anwendung von $(*)$ (mit $\overline{z}$ statt z) dann (Bild von (A-z)$)^\perp = \{0\}$. Aus der Abgeschlossnheit des Bildes ergibt sich dann die Surjektivitaet.) Da $(A-z)$ fuer ein solches z also injektiv und surjektiv ist, ist es bijektiv. Damit existiert also das Inverse $(A-z)^{-1}$ und es liefert $(*)$ die Abschaetzung

$$\|(A-z)^{-1}y\| \leq \frac{1}{|\Im z|}\|y\|.$$

fuer alle $y \in \mathcal{H}$. Wir fassen diese Betrachtungen noch einmal zusammen.

LEMMA. *Sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann ist $A-z$ fuer jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ bijektiv und damit das Spektrum von A in $\mathbb{R}$ enthalten. Weiterhin gilt fuer $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Abschaetzung*

$$\|(A-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\Im z|}.$$

Jeder selbstadjungierte Operator liefert viele Herglotz Funktionen:

PROPOSITION. *Sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $y \in \mathcal{H}$ mit $y \neq 0$ beliebig. Sei*

$$f_y : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C},\ f_y(z) = \langle y, (A-z)^{-1}y\rangle.$$

Dann gilt:

- *f_y ist holomorph.*
- *$\Im f_y > 0$.*
- *Es gilt $|f_y(z)\Im z| \leq \|x\|^2$ fuer alle $z \in \mathbb{C}^+$.*

Bemerkung. Wir nutzen die Konvention, daß das Skalarprodukt im zweiten Argument linear ist. Andernfalls mueßte man die Funktionen definieren durch $\langle (A-z)^{-1}y, y\rangle$.

Beweis. Der erste Punkt folgt leicht aus der Resolventenformel

$$(A-z)^{-1} - (A-z_0)^{-1} = -(z-z_0)(A-z)^{-1}(A-z_0)^{-1}.$$

Der zweite Punkt ergibt sich aus einer kurzen Rechnung, wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Im f_y(z) &= \Im\langle y, (A-z)^{-1}y\rangle \\
&= \Im\langle (A-z)(A-z)^{-1}y, (A-z)^{-1}y\rangle \\
&= \Im z\langle (A-z)^{-1}y, (A-z)^{-1}y\rangle \\
&= \Im z\|(A-z)^{-1}y\|^2 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Hier folgt die dritte Gleichung aus der schon oben angesprochenen Tatsache, daß $\langle (A-a)x, x\rangle$ reell ist fuer alle $a \in \mathbb{R}$ und $x \in D(A)$.
Der dritte Punkt ergibt sich aus der Abschaetzung fuer $\|(A-z)^{-1}\|$ und der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\begin{aligned}
|f_y(z)\Im z| &= |\langle y, (A-z)^{-1}y\rangle \Im z| \\
&\leq \|y\|\|(A-z)^{-1}y\|\Im z| \\
&\leq \|y\|^2\|(A-z)^{-1}\|\Im z \\
&\leq \|y\|^2.
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Aus der vorangegangenen Proposition und dem Satz von Herglotz ergibt sich sofort folgende spektakulaere Aussage.

THEOREM (Spektralmaß). *Sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ und $y \in \mathcal{H}$ beliebig. Dann existiert ein eindeutiges positives beschraenktes Maß μ_y auf $\mathbb{R}$ mit*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\mu_y(t) = \langle y, (A-z)^{-1} y \rangle$$

fuer alle $z \in \mathbb{C}^+$. Es gilt $\mu_y(\mathbb{R}) \leq \|y\|^2$.

DEFINITION. *Das Maß μ_y aus dem vorangehenden Theorem heißt Spektralmaß zu y von A.*

Aufbauend auf dem vorigen Theorem kann man nun (nach einer gewissen Arbeit) noch *Spektralkalkuel* machen (d.h. Funktionen von Operatoren bilden): Zu jeder beschraenken meßbaren Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert ein eindeutiger beschraenkter Operator $f(A)$ auf dem Hilbertraum mit

$$\langle y, f(A)y \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu_y(t)$$

fuer alle $y \in \mathcal{H}$. Die Abbildung

$$\text{Beschraenkte meßbare Funktionen} \longrightarrow \text{beschraenkte Operatoren}$$
$$f \mapsto f(A),$$

erfuellt

- $1(A) = id$,
- $f(A)^* = \overline{f}(A)$,
- $f(A) + g(A) = (f+g)(A)$,
- $f(A)g(A) = (fg)(A)$,

fuer alle beschraenkten meßbaren f, g. Auch gilt $\|f(A)\| = \|f|_{\sigma(A)}\|_\infty$, wobei $\sigma(A)$ das Spektrum von A bezeichnet. Weiterhin kann man zu jedem y aus dem Hilbertraum, dann den Unterraum

$$\mathcal{H}_y = \overline{Lin\{(A-z)^{-1}y : z \in \mathbb{C}^+\}} = \overline{\{f(A)y : \text{f beschraenkt, meßbar}\}}$$

assozieren. Die Abbildung

$$\text{Beschraenkte meßbare Funktionen} \longrightarrow \mathcal{H}_y, \ f \mapsto f(A)y,$$

läßt sich eindeutig zu einer unitaeren Abbildung

$$U_y : L^2(\mathbb{R}, \mu_y) \longrightarrow \mathcal{H}_y$$

fortsetzen. Die Abbildung U_y stifted eine unitaere Aequivalenz zwischen der Einschraenkung von A auf $\mathcal{H}_y$ und der Multiplikation mit der Identitaet auf $L^2(\mathbb{R}, \mu_y)$.

Ende der 19. Vorlesung

KAPITEL 4

Referenzen

Der Stoff der ersten drei Kapitel ist fortgeschritten aber standard. Das kann man in vielen verschiedenen Lehrbuechern finden. Die Darstellung im ersten Kapitel orientiert sich stark am Buch 'Real and complex Analysis' von W. Rudin. Teile sind auch inspiriert durch entsprechende Darstellung im Buch 'Maß- und Integrationstheorie' von F. Bauer. Das zweite Kapitel enthaelt in den ersten beiden Abschnitten Stoff aus den entsprechenden Abschnitten des Uebersichtsartikel B. Simon, 'Spectral Analysis of Rank One Perturbations and Applications', CRM Proceedings and Lecture Notes 8 (1995). Das Material des dritten Abschnitts des zweite Kapitel kann (mit gewissen Varianten) im Buch J. Weidmann 'Lineare Operatoren im Hilbertraum' gefunden werden. Teile des vierten Abschnittes des zweiten Kapitel koennen im Buch von M. Demuth, M. Krishna 'Determining Spectra in Quantum Theory' nachgelesen werden. Das praesentierte Material kann man auch im Buch G. Teschl 'Mathematical Methods in Quantum Mechanics; With Applications to Schroedinger Operators' finden. Eine pdf - Version dieses Buch ist auf der Homepage von G. Teschl erhaeltlich.