Analysis I

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 12 **Abgabe 03.02.2011**

(1) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konstant ist, falls f hölderstetig mit Exponent $\alpha > 1$ ist. (Zur Erinnerung: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt hölderstetig mit Exponent $\beta > 0$, wenn ein $C > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < 1$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\beta$ gilt.)

(2) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha > 0$. Zeigen Sie:

(a) $\lim_{x\to\infty} x^{-k}\exp(\alpha x) = \infty$.

(b) $\lim_{x\to\infty} x^k \exp(-\alpha x) = 0$.

(c) $\lim_{x\to 0+} x^k \ln x = 0$.

Hinweis zu (a)/(b): $\exp(\alpha x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^k}{k!}$.
Hinweis zu (c): Betrachten Sie $x = \exp(-y)$ für $y \to \infty$.

(3) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad h(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\ln|x|, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(4) Untersuchen Sie folgende Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (und, wo möglich, auch ihre Ableitungen) auf links und rechtsseitige Differenzierbarkeit:

(a) $x \mapsto |x|$,

(b) $x \mapsto [x] := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$,

(c) $x \mapsto \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} x/|x| & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$

(d) $x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}.$

Zusatzaufgabe:

(Z1) Zeigen Sie: Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in einem Punkt x, wenn sie in x rechts- und linksseitig differenzierbar ist und die beiden einseitigen Ableitungen übereinstimmen.

(Z2) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in 0 differenzierbar und in allen anderen Punkten unstetig ist.