Globale Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Wintersemester 2018 **Dr. Marcel Schmidt**

Blatt 2 **Abgabe: 29.10.2018**

(1) (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Torus $\mathbb{T}^n$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

(b) Es seien $0 < r < R$. Zeichnen Sie die Menge

$$T^2 := \{((R + r\cos\theta)\cos\varphi, (R + r\cos\theta)\sin\varphi, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass T^2 ausgestattet mit der Unterraumtopologie homöomorph zu $\mathbb{T}^2$ ist.

(2) Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein C^k-Atlas. Zeigen Sie, dass eine eindeutige differenzierbare Struktur $\mathcal{D}$ der Ordnung k existiert, mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$.

(3) Es sei $(M, \mathcal{D})$ eine C^k-Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{D}$ erzeugender C^k-Atlas. Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^n$ und $1 \leq l \leq k$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) $f \in C^l(M, \mathbb{R}^n)$.

(ii) Für alle $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ ist

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$$

eine C^l-Abbildung.

(iii) Für alle $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$ ist

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$$

eine C^l-Abbildung.

Erinnerung: Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $f : W \to \mathbb{R}^m$ heißt regulär, falls für alle $x \in W$ die Ableitung $Df(x)$ maximalen Rang hat, das heißt

$$\operatorname{Rang} Df(x) = \begin{cases} n & \text{falls } n \leq m, \\ m & \text{falls } n > m, \end{cases}$$

gilt.

(4) Glatte Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$.

(a) Beweisen Sie, dass für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \in M$ und $l \leq n$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Es existiert eine offene Umgebung W von p und eine glatte reguläre Funktion $g : W \to \mathbb{R}^{n-l}$ mit
$$M \cap W = \{x \in W \mid g(x) = 0\}.$$

(ii) Es existiert eine offene Umgebung W von p, eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^l$, eine glatte Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-l}$ und eine Permutation $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit
$$M \cap W = P\{(x, f(x)) \mid x \in U\}.$$

(b) Es sei $l \leq n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$, sodass für alle $p \in M$ eine der beiden äquivalenten Bedingungen aus (a) gilt. Zeigen Sie, dass M ausgestattet mit der Unterraumtopologie eine l-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

(c) Es sei $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$ die übliche glatte Struktur des $\mathbb{R}^n$ und es seien $l \leq n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wie in (b). Eine Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$ heißt l-Schnitt für M, falls
$$U \cap M = \{x \in U \mid \varphi(x)_{l+1} = \ldots = \varphi(x)_n = 0\}.$$

Ferner sei
$$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l,\ (x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^l).$$

Zeigen Sie, dass M ausgestattet mit der Unterraumtopologie und der von dem Atlas
$$\{(U \cap M, \pi \circ \varphi|_{U \cap M}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}^n} \text{ ist } l\text{-Schnitt für } M\}$$

erzeugten differenzierbaren Struktur eine glatte Mannigfaltigkeit ist.