Sommersemester 2015 **Prof. Dr. D. Lenz**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 6 **Abgabe: Montag 06.07.2015**

(1) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y^3 e^x}{1+y^2} + x \sin y$$

mit $y(0) = 1$ genau eine Lösung auf $\mathbb{R}$ besitzt.

(2) Wenden Sie das Picard'sche Iterationsverfahren auf das AWP

$$y' = 2xy, \quad y(0) = y_0$$

an.

(3) Sei $\mathbb{R}^{m\times n}$ der Raum aller reellwertigen $m \times n$-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt:

$$\sup\{\|Ax\| \colon \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| \colon \|x\| \leq 1\}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ definiert wird.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

(4) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen.

(a) Sei $f \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gebe ein $M > 0$ mit $\|\nabla f(\xi)\| \leq M$ für alle $\xi \in \Omega$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \Omega$ gilt:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M\|y - x\|.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(b) Sei nun $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar und es gebe ein $M > 0$ mit $\|\nabla f_j(\xi)\| \leq M$ für alle $\xi \in \Omega, 1 \leq j \leq m$. Folgern Sie: Es gilt für alle $x, y \in \Omega$:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \sqrt{m} M \|y - x\|$$

Zusatzaufgaben:

(Z) Seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

für ein $L > 0$. Seien weiterhin $y_1 < y_2$ die beiden einzigen Nullstellen von h. Zeigen Sie, dass eine maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = g(x)h(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

wobei $y_1 \leq y_0 \leq y_2$, auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.