# Analysis III

**Sommersemester 2009** **Prof. Dr. D. Lenz**

**Blatt 7** **Abgabe Montag 14.12.2009**

(1) (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar. Zeigen Sie

$$\Delta f(x) = \nabla \cdot (\nabla f)(x).$$

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig diffbar. Zeigen Sie

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \ \text{ und } \ \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0.$$

(2) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen.

(a) Sei $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $0 = \int_V g(x)dx = \int 1_V(x)g(x)dx$ für jedes beschränkte $V \subset \mathbb{R}^N$ mit Riemann integrierbarer Funktion $x \mapsto 1_V(x)$. Zeigen Sie $g \equiv 0$.

(b) Seien $g, f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\int_V f(x)dx = \int_V g(x)dx$ für alle beschränkten Mengen $V \subset \mathbb{R}^N$ mit Riemann integrierbarem $x \mapsto 1_V(x)$. Zeigen Sie $f = g$.

(3) (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen mit glattem Rand, der durch eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben ist. Sei $k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $k(x, y) = (-y, x)$. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt $F(U)$ von $U$ gegeben ist durch

$$F(U) \;=\; \frac{1}{2}\int_\gamma k\,d\gamma \;=\; \frac{1}{2}\int_a^b \langle k(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt.$$

(b) Man berechne die Fläche unter einer Zykloide über eine Periode, definiert durch

$$\Phi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \Phi(t) = (\,t \;+\; \cos t\,,\; 1 \;+\; \sin t\,).$$

(4) Für beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $u : \Omega \cup \partial\Omega \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von $\Omega$ zweimal stetig differenzierbar mit $u \not\equiv 0$, $u \equiv 0$ auf $\partial\Omega$ und $-\Delta u = \lambda u$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\lambda > 0$ gilt.

**Zusatzaufgabe:** Deuten Sie die Aussage von Aufgabe 3.a) geometrisch.