Spektraltheorie

Sommersemester 2016 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 7 **Besprechung Dienstag 21.06.2016**

(1) Sei $(X, \mathcal{B}, m)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar und M_ψ der maximale Operator der Multiplikation mit ψ in $L^2(X, m)$.

  (a) Berechnen Sie für $f \in L^2(X, m)$ das Spektralmaß μ_f als vagen Grenzwert.

  (b) Berechnen Sie für $f \in L^2(X, m)$ die Verteilungsfunktion des Spektralmaß μ_f mittels Stonescher Formel.

(2) Sei A ein selbstadjungierter Operator mit reinem Punktspektrum. (Es gibt dann also eine Orthonormalbasis e_j, $j \in I$, des Hilbertraum und $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j \in I$, mit $e_j \in D(A)$ und $Ae_j = \lambda_j e_j$ für alle $j \in I$.) Bestimmen Sie das zu A gehörige projektionswertige Maß E mit $E(id) = A$.

(3) Sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum und $\lambda \in \mathbb{R} \cap \varrho(A)$. Bestimmen Sie $\|(A-\lambda)^{-1}\|$. (Hinweis: Wie können Sie $\|(A-\lambda)^{-1} f\|^2$ mithilfe von μ_f ausdrücken?)

(4) Sei A ein selbstadjungierte Operator im Hilbertraum mit $\langle f, Af\rangle \geq 0$ fuer alle f aus $D(A)$. Zeigen Sie $\sigma(A) \subset [0, \infty)$. (Hinweis: Es gilt (Warum?) $\langle f, Af\rangle = \int_{\mathbb{R}} id \, d\mu_f$.)