Höhere Analysis

Sommersemester 2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 9 **Abgabe Mittwoch 30.06. 2010**

(1) Sei E ein unendlichdimensionaler normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass der schwache Abschluß von $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ mit der Einheitskugel von E übereinstimmt.

(2) Zeigen Sie, dass das topologische Produkt lokalkonvexer Vektorräume wieder ein lokalkonvexer Vektorraum ist.

(3) Sei E ein lokalkonvexer Vektorraum und P und Q zwei Halbnormenfamilien mit zugehörigen lokalkonvexen Topologien T_P und T_Q. Zeigen Sie, dass T_Q genau dann schwächer ist als T_P, wenn es zu jedem $q \in Q$ ein $c > 0$ und endlich viele $p_1, \dots, p_n \in P$ gibt, so dass

$$q \leq c \max\{p_j : j = 1, \dots, n\}$$

gilt.

(4) Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum. Zeigen Sie

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ und } \|x_n\| \to \|x\| \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0.$$

Hinweis: Nutzen Sie die gleichmäßige Konvexität der Norm um zu zeigen, dass

$$\tfrac{\|x_n + x_m\|}{2} \to 1 \Rightarrow \ (x_n) \text{ ist Cauchy Folge}$$

gilt. Um zu zeigen, dass $\frac{\|x_n + x_m\|}{2} \to 1$, nutzen Sie ein Funktional der Norm 1.