
Höhere Analysis I

Sommersemester 2015

Prof. Dr. D. Lenz

Blatt 4

Abgabe Dienstag 19.05.2015

- (1) Sei \mathbb{R} ausgestattet mit der Borel σ -algebra und dem Lebesguemaß λ . Zeigen Sie, dass für $p, q \in \mathbb{N}$ beliebig mit $p \neq q$ nicht die Inklusion $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \subseteq L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ gilt.
- (2) Gegeben sei der Raum $\mathcal{C}([0, 1])$ der stetigen Funktionen auf den Intervall $[0, 1]$.
 - (a) Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 \overline{f(x)}g(x) dx, \quad f, g \in \mathcal{C}([0, 1]),$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}([0, 1])$ ist.

- (b) Beweisen Sie, dass $\mathcal{C}([0, 1])$ mit dem eben definierten Skalarprodukt kein Hilbertraum ist.
- (3) Zeigen Sie:
 - (a) Die Normen $\|\cdot\|_p$ auf ℓ^p werden für $p \neq 2$ nicht von einem Skalarprodukt induziert.
 - (b) Die Supremumsnorm auf $C([0, 1])$ wird nicht durch ein Skalarprodukt induziert.

Hinweis: In Hilberträumen gilt die Parallelogrammidentität.

- (4) Sei V ein Vektorraum und s ein Skalarprodukt auf V . Zeigen Sie, dass

$$|s(x, y)| = s(x, x)^{\frac{1}{2}}s(y, y)^{\frac{1}{2}}$$

genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.