Analysis II Sommersemester 2017

Hausaufgabenblatt 6

Abgabe am 17.05.2017

Diejenigen Studenten, die sich nicht zur Prüfung anmelden können, sollen sich direkt an Frau Jutta Jäger wenden!

Aufgabe 1. Seien $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Begründen Sie, dass die Funktionen beliebig oft differenzierbar sind und leiten Sie jeweils eine Reihenentwicklung her.

Aufgabe 2. Zeigen Sie die Umkehrbarkeit von sinh auf $\mathbb{R}$ und von cosh auf $(0, \infty)$. Skizzieren Sie die jeweiligen Umkehrfunktionen, diskutieren Sie deren Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die ersten Ableitungen der Umkehrfunktionen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie die folgenden Aussagen für die trigonometrischen Funktionen $\sin x = \mathfrak{Im} e^{\imath x}$ und $\cos x = \mathfrak{Re} e^{\imath x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) $\sin x = -\sin(-x)$ und $\cos x = \cos(-x)$, $x \in \mathbb{R}$

(b) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, $x, y \in \mathbb{R}$

(c) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$, $x, y \in \mathbb{R}$

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Zu $a > 0$ existiert genau eine stetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad F(x + y) = F(x)F(y)$$

und $F(1) = a$. Diese ist gegeben durch $F(x) = \exp(x \ln a)$.