Höhere Analysis I

Sommersemester 2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 8 **Abgabe Freitag 22.06.2012**

(1) Eine Norm auf einem reellen Vektorraum wird genau dann von einem Skalarprodukt erzeugt, wenn sie die Parallelogrammidentität erfüllt.

(2) Finden Sie jeweils ein Beispiel eines Hilbertraumes $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und einer Teilmenge $A \subseteq H$, so dass gilt:

(a) A ist konvex aber nicht abgeschlossen und es gibt keine beste Approximation von $x \in H \setminus A$ in A.

(b) A ist abgeschlossen aber nicht konvex und es gibt keine eindeutige beste Approximation von $x \in H \setminus A$ in A.

(c) A ist abgeschlossen aber nicht konvex und es gibt keine beste Approximation von $x \in H \setminus A$ in A.

(3) Zeigen Sie, dass der Approximationssatz in ℓ^∞ nicht gilt.
Hinweis: Finden Sie eine Teilmenge von ℓ^∞, so dass es zu gegebenen $x \in \ell^\infty$ mehrere beste Approximationen gibt.

(4) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Eine Folge $(x_n) \subseteq H$ heißt schwach konvergent gegen x, wenn für alle $y \in H$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Zeigen Sie: Eine Folge $(x_n) \subseteq H$ konvergiert genau dann gegen x, wenn sie schwach gegen x konvergiert und $\|x_n\| \to \|x\|$, für $n \to \infty$ gilt.