
Analysis II

Sommersemester 2014

Prof. Dr. D. Lenz

Blatt 7

Abgabe 28.05.2014

- (1) Seien $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Diskutieren Sie, dass die Funktionen beliebig oft differenzierbar sind und geben Sie eine Reihenentwicklung an.

- (2) Diskutieren Sie die Umkehrbarkeit von \sinh auf \mathbb{R} und von \cosh auf $(0, \infty)$. Skizzieren Sie die jeweiligen Umkehrfunktionen, diskutieren Sie deren Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die ersten Ableitungen der Umkehrfunktionen.
- (3) Zeigen Sie die folgenden Aussagen für die trigonometrischen Funktionen $\sin x = \Im e^{ix}$ und $\cos x = \Re e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (a) $\sin x = -\sin(-x)$ und $\cos x = \cos(-x)$, $x \in \mathbb{R}$
 - (b) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, $x, y \in \mathbb{R}$
 - (c) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$, $x, y \in \mathbb{R}$
- (4) Zeigen Sie, dass die Funktion $d : [0, \pi) \times [0, \pi) \rightarrow [0, \infty)$ definiert durch

$$d(x, y) := |\sin(x - y)|$$

eine Metrik auf $[0, \pi)$ ist.

Tipp: Sie dürfen die Aufgabe 3 verwenden.