Wintersemester 2015/16 **Prof. Dr. D. Lenz**

Höhere Analysis II

Blatt 11 **Zur Besprechung in der Übung am 09.02.2016**

(1) Sei X eine Menge und $\mathcal{F}$ eine Filter in X. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Der Filter $\mathcal{F}$ ist *maximal*, das heißt, für jeden Filter $\mathcal{F}'$ mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ gilt $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

(ii) Ist $Y \subset X$ mit $Y \cap F \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$, so gilt $Y \in \mathcal{F}$.

(iii) Der Filter $\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter.

(2) Sei X eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter in X. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gilt $\bigcap_{Y \in \mathcal{F}} Y = \emptyset$.

(ii) Jedes $Y \in \mathcal{F}$ ist unendlich.

(iii) Die Menge X ist unendlich und für alle $Y \subset X$ mit $X \setminus Y$ endlich gilt $Y \in \mathcal{F}$.

(3) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie: Hat jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung, so hat jedes Netz in X einen Häufungspunkt.

Hinweis: Verweisen Sie nicht auf den Satz aus der Vorlesung, sondern beweisen Sie die Implikation direkt.

(4) Sei X ein topologischer Hausdorffraum und seinen $C_1, C_2 \subset X$ disjunkte kompakte Teilmengen. Zeigen Sie, dass es disjunkte offene Mengen U_1, U_2 mit $C_1 \subset U_1$, $C_2 \subset U_2$ gibt.