

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Probeklausur

- (1) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = -y + e^{-x} \cos x, \quad y(0) = 1.$$

- (a) Geben Sie eine Lösung des Anfangswertproblems an.
(b) Ist die Lösung eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (2) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = 3 \cdot \frac{x}{y}, \quad y(0) = 1.$$

- (a) Geben Sie eine Lösung des Anfangswertproblems an.
(b) Ist die Lösung eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (3) a.) Was ist eine exakte Differentialgleichung?
b.) Geben Sie ein Beispiel einer exakten Differentialgleichung an.
c.) Weisen Sie nach, dass die Differentialgleichung

$$0 = 2y \cdot e^x \cdot y' + (e^x + e^{-y^2})$$

nicht exakt ist auf $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Finden Sie einen integrierenden Faktor, der nur von y abhängt. Bestimmen Sie für die neue Differentialgleichung ein erstes Integral.

- (4) a.) Was besagt der Peanosche Existenzsatz?
b.) Geben Sie drei verschiedene charakteristische Eigenschaften der maximalen Lösung an!
c.) Geben Sie ein stetiges $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ an, so dass die maximalen Lösungen von $y' = f(x, y)$ nicht auf ganz \mathbb{R} existieren.
- (5) a.) Sei A eine reelle 2×2 Matrix mit reellen Eigenwerten a, b . Skizzieren Sie das Vektorfeld von

$$y' = Ay$$

in Abhängigkeit von a und b .

- b.) Zeigen Sie, dass die maximale Lösung für alle Zeiten existiert und eindeutig ist.