Analysis II

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 3 **Abgabe Mittwoch 27.04.2011**

(1) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $f(1) = a > 0$ und es gelte die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = a^x$ gilt.

(2) Untersuchen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Riemannschen Integrale existieren:

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx, \quad \text{(b)} \int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx, \quad \text{(c)} \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

(3) Untersuchen Sie für welche Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die folgenden uneigentlichen Integrale existieren:

$$\text{(a)} \int_2^\infty \frac{1}{x \cdot (\ln x)^\alpha}\, dx, \quad \text{(b)} \int_1^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\, dx.$$

(4) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$\text{(a)} \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad \text{(b)} \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx, \quad \text{(c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx.$$

Hinweis für (c): Setzen Sie $x = 2t$ und nutzen Sie Additionstheoreme für den doppelten Winkel.

Zusatzaufgaben

- Sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Gilt dann $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Viel Erfolg!