Analysis I

Wintersemester 2016/2017 **Prof. Dr. D. Lenz**

Weihnachtszettel **Abgabe: 02.01.2017**

(1) Seien $a, c > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Folge (x_n) induktiv durch $x_0 := c$ und

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right).$$

Beweisen Sie, dass (x_n) gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert.

(2) Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$x_n := \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass (x_n) konvergiert, falls $a \geq 0$. Zeigen Sie, dass (x_n) auch dann konvergiert, wenn $a < 0$. Beweisen Sie weiterhin, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$e(a) := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

die Gleichung $e(-a) = e(a)^{-1}$ erfüllt.

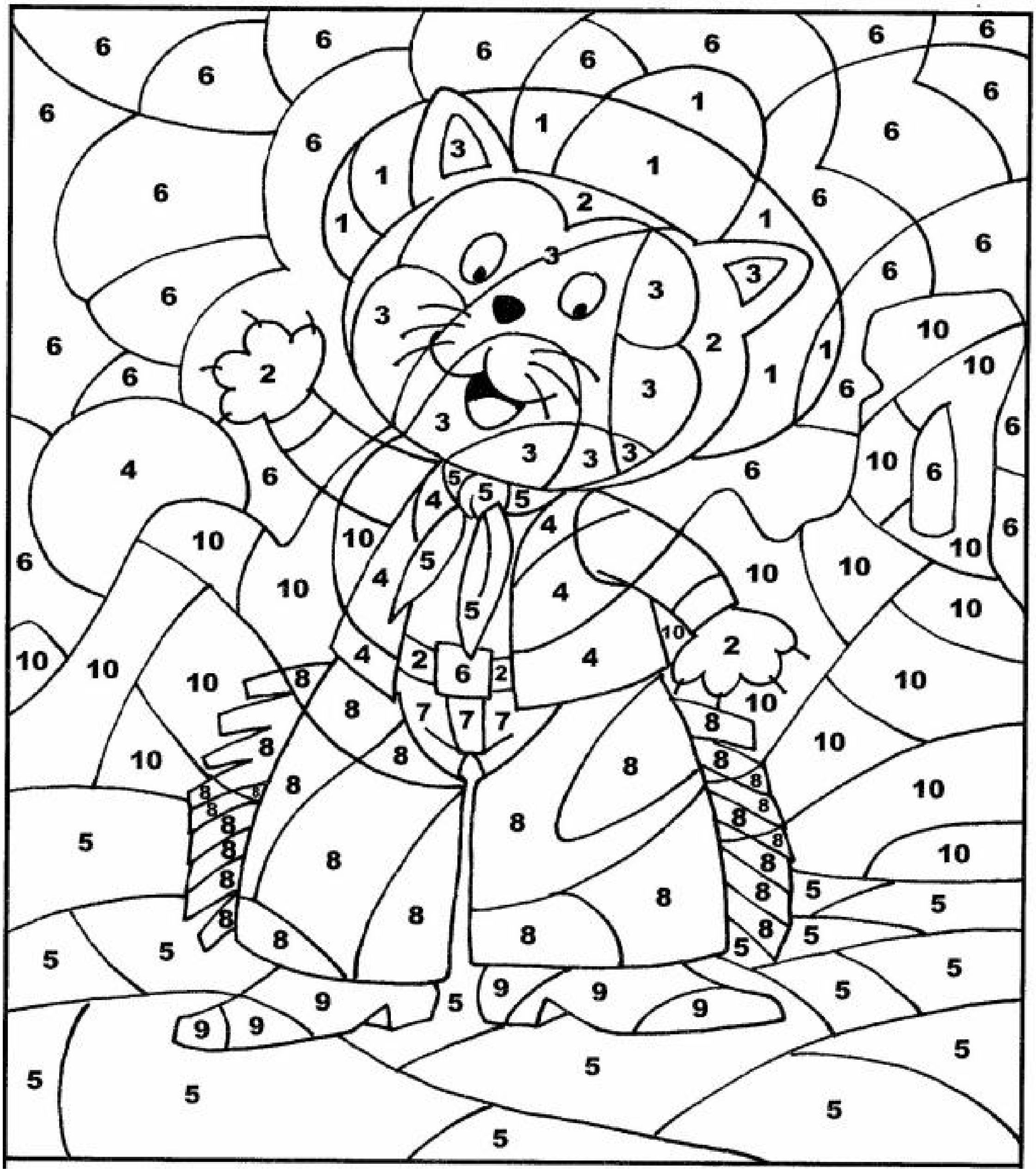
(3) Es sei K ein angeordneter Körper und $I_n, n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in K. Ferner sei (x_n) eine Folge in K mit $x_n \in I_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist.

(4) Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und es sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \in I_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (x_n) konvergiert und für den Grenzwert gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

(5) Skizzieren Sie die folgende Menge komplexer Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene

$$\begin{aligned}
&\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 4,\ |z+2i| \geq 2,\ |z+2-2i| \geq 4-2\sqrt{2},\ |z-2-2i| \geq 4-2\sqrt{2}\} \\
\cup&\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 4,\ \operatorname{Im} z \geq -2\operatorname{Re} z - 8,\ \operatorname{Im} z \leq -\tfrac{1}{2}\operatorname{Re} z + 4,\ \operatorname{Re} z \leq 0,\ \operatorname{Im} z \geq 0\} \\
\cup&\{z \in \mathbb{C} \mid |z+8-8i| \leq 1\} \cup \{-2+2i,\ 2+2i\}
\end{aligned}$$



(6) Malen nach Zahlen:

(a) Ignorieren Sie die Zahlen auf der Zeichnung und färben Sie die Flächen mit vier Farben, so dass zwei aneinandergrenzende Flächen nie die selbe Farbe besitzen. (Flächen die sich nur in einem Punkt berühren grenzen nicht aneinander.)

(b*) Beweisen Sie (ohne Zuhilfenahme computeralgebraischer Mittel!), dass eine solche Färbung für ein beliebiges "Malen nach Zahlen" Bild möglich ist.

Die folgende Aufgabe wird mit maximal 16 Punkten bewertet.

(7) Diese Aufgabe beschäftigt sich mit einer Konstruktion der reellen Zahlen. Weitere Details und Hintergründe über diese finden Sie in dem Aufsatz 'The Eudoxus Real Numbers' von R.D. Arthan, siehe https://arxiv.org/abs/math/0405454v1.

Für eine Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definieren wir

$$d_f(n, m) := f(n) + f(m) - f(n + m).$$

Mit E bezeichnen wir die Menge aller Fast-Homomorphismen von $\mathbb{Z}$, d.h.

$$E := \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid \text{es existiert } C \in \mathbb{N} \text{ mit } |d_f(m, n)| \leq C \text{ für alle } n, m \in \mathbb{Z} \},$$

und mit B bezeichnen wir die Menge der beschränkten Funktionen auf $\mathbb{Z}$, also

$$B := \{g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid \text{es existiert } D \in \mathbb{N} \text{ mit } |g(n)| \leq D \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Sind $f, g \in E$, so schreiben wir wie üblich

$$f + g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (f + g)(n) = f(n) + g(n) \text{ und } f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (f \circ g)(n) = f(g(n)).$$

Zeigen Sie:

(a) Auf der Menge E ist eine Äquivalenzrelation gegeben durch $\sim$, mit

$$f \sim g :\Longleftrightarrow f - g \in B.$$

Die Äquivalenzklasse von f (bezüglich $\sim$) bezeichnen wir mit

$$[f] := \{g \in E \mid g \sim f\} = \{g \in E \mid f - g \in B\},$$

und die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit

$$\mathbb{E} := \{[f] \mid f \in E\}.$$

(b) Zeigen Sie, dass durch $+ : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, $[f] + [g] := [f + g]$ eine Operation auf $\mathbb{E}$ definiert wird und dass $(\mathbb{E}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie, dass durch $\cdot : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, $[f] \cdot [g] := [f \circ g]$ eine assoziative Operation mit neutralem Element definiert wird.

Tatsächlich ist $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ ein Körper. Wir führen nun eine Ordnung auf ihm ein. Beweisen Sie:

(d) Sei $f \in E$. Ist die Menge $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N}$ unendlich, so gibt es für jedes $D \in \mathbb{N}$ ein $M \in \mathbb{N}$ mit

$$f(nM) > (n + 1)D \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(e) Wir sagen $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$, falls für alle $C \in \mathbb{N}$ ein $M \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n > M$ gilt $f(n) > C$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{E}^+ := \{[f] \in \mathbb{E} \mid \lim_{n\to\infty} f(n) = \infty\}$$

wohldefiniert ist.

(f) $\mathbb{E}$ mit positiven Elementen $\mathbb{E}^+$ ist ein angeordneter Körper.

Tasächlich ist $\mathbb{E}$ mit der von $\mathbb{E}^+$ induzierten Ordnungsrelation ordnungsvollständig. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es (bis auf Umbenennung) nur einen Ordnungsvollständigen Körper gibt, somit haben wir die reellen Zahlen konstruiert (die Konstruktion skizziert, die ausgelassenen Details sind in der oben genannten Quelle zu finden).

Wir diskutieren nun die Beziehung zwischen $\mathbb{E}$ und den 'üblichen' reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Für eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$f_\alpha(n) := \lfloor n\alpha \rfloor,$$

wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Gaußklammer oder Abrundungsfunktion ist, d.h. für $x \in \mathbb{R}$ ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, so dass $n \leq x$. Beweisen Sie:

(g) Es gehört f_α zu E für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

(h) Sei $f \in E$. Es existiert ein $C \in \mathbb{N}$ mit $|f(nm) - mf(n)| \leq Cm$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt

$$\left| \frac{f(n)}{n} - \frac{f(m)}{m} \right| \leq \frac{C}{n} + \frac{C}{m}.$$

(i) Für $g \in E$ konvergiert die Folge $(\frac{1}{n}g(n))$ in $\mathbb{R}$.

Mithilfe des eben bewiesenem definieren wir $\alpha : E \to \mathbb{R}$ durch

$$\alpha(g) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} g(n).$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(j) Es gilt $g - f_{\alpha(g)} \in B$ für alle $g \in E$.

(k) Es gilt $f_\alpha - f_\beta \in B$ genau dann, wenn $\alpha = \beta$ gilt.

(l) Sind f, g in E, so gilt $f - g \in B$ genau dann, wenn $\alpha(f) = \alpha(g)$ gilt.

(m) Die Abbildung

$$J : \mathbb{R} \to \mathbb{E}, \quad \beta \mapsto [f_\beta]$$

ist bijektiv und ihre Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$K : \mathbb{E} \to \mathbb{R}, \quad [g] \mapsto \alpha(g).$$

Die Abbildungen J und K sind gut mit den Rechenoperationen und den Ordnungsstrukturen von $\mathbb{E}$ und $\mathbb{R}$ verträglich. Zeigen Sie:

(n) Es gilt $J(\alpha + \beta) = J(\alpha) + J(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(o) Es gilt $J(\alpha\beta) = J(\alpha) \cdot J(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(p) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $x > y$ genau dann, wenn $J(x) > J(y)$.

Hinweis: Natürlich können Sie zum Lösen eines Teiles der Aufgabe die vorher bewiesenen Aussagen verwenden. Die Aufgabenteile (a) - (f) und (g) - (m) sind unabhängig voneinander. Für (n) - (p) benötigen Sie die Definitionen aus allen vorherigen Teilaufgaben.