Analysis I

Wintersemester 2013/2014 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 10 **Abgabe 17.01.2014**

Reihen

(1) Berechnen Sie die folgenden Summen:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$, (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-7)^k}{9^k}$, (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{3^{k-1}}$.

Hinweis zu (a): Es gilt $\frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{A}{3k-1} + \frac{B}{3k+2}$ für geeignete (welche?) A und B.

(2) Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n\geq 1} x_n$ auf Konvergenz, wenn x_n gegeben ist durch

(a) $x_n = \frac{1}{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, (b) $x_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(c) $x_n = \frac{n!}{n^n}$, (d) $x_n = \frac{n^4}{3^n}$, (e) $x_n = \frac{n+4}{n^2-3n+1}$.

(3) Sei (d_k) eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} d_k = \infty.$$

Was kann über die Konvergenz der folgenden Reihen gefolgert werden?

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{1+d_n}$, (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{1+nd_n}$, (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{1+n^2 d_n}$, (d) $\sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{1+d_n^2}$.

(4) Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Reihe $\sum_{n\geq 1}(x_{n+1} - x_n)$ konvergiert genau dann, wenn die Folge (x_n) konvergiert.

(b) Falls $\sum_{n\geq 1} x_n$ konvergiert und $x_n \geq 0$ ist, so konvergiert auch $\sum_{n\geq 1} x_n^2$.

Zusatzaufgaben:

(Z1) Zeigen Sie, dass die Voraussetzung $x_n \geq 0$ in Aufgabe 4 (b) nötig ist. Hinweis: Es geht darum ein Gegenbeispiel zu finden.

(Z2) Seien (a_n), (b_n) Folgen nicht negativer reeller Zahlen, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

(a) Was können Sie über die Konvergenz/Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$ sagen?

(b) Was können Sie sagen, wenn man zusätzlich annimmt, dass (a_n), (b_n) monoton fallend sind?