Analysis III

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 6 **Abgabe Montag 7.12. 2009**

(1) Zeigen Sie:

a.) Für $A \in \mathbb{C}^{N\times d}$ mit $d \leq N$ gilt: $\det(A^T A) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Rang} A = d$.

b.) $a_1, \ldots, a_{N-1} \in \mathbb{C}^N$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ $a_1 \wedge \cdots \wedge a_{N-1} = 0$.

c.) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\phi : U \to \mathbb{R}^N$ die Parametrisierung einer Fläche mit $d \leq N$. G_ϕ bezeichne die Gramsche Determinante zu ϕ. Dann gilt:

$$\phi \text{ regulär} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in U \;\; G_\phi(x) \neq 0.$$

(2) Seien $a_j \in \mathbb{C}^N$, $j = 1, \ldots, N-1$. Berechnen Sie $a_1 \wedge \cdots \wedge a_{N-1}$ für

a.) $N = 2$,

b.) $N = 3$.

(3) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Polkappe einer Kugel mit Radius $R > 0$ im dreidimensionalen euklidischen Raum, definiert durch

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq r,\ z \geq 0\right\},$$

wobei $r \leq R$.

(4) Sei $r, R \in \mathbb{R}_+$, so dass $r < R$. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Rotationskörpers im $\mathbb{R}^3$, der durch Rotation des Kreises $\{\ (x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-R)^2 + z^2 = r^2\ \}$ um die z-Achse entsteht. Wie heißt diese geometrische Figur?

Zusatzaufgabe:

Berechnen Sie die Gramsche Determinante für die Parameterisierung der Sphäre mit Radius R durch Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$.