Operatoren auf Mannigfaltigkeiten

Sommersemester 2017 **Marcel Schmidt**

Blatt 3

(1) In der Definition von Modellmannigfaltigkeiten in der Vorlesung hat sich leider ein kleiner Fehler eingeschlichen. Wir nennen eine riemannsche n-Mannigfaltigkeit $(M, \mathbf{g})$ *riemannsches Modell*, falls es ein $R \in (0, \infty]$, eine globale Karte $\varphi : M \to U_R$ und eine glatte Abbildung $\psi : (0, R) \to (0, \infty)$ gibt, sodass die Abbildung

$$\Phi : M \setminus \{o\} \to (0, R) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1},\ x \mapsto (r(x), \theta(x))$$

eine riemannsche Isometrie ist, wobei $o := \varphi^{-1}(0)$,

$$r : M \to [0, \infty),\ x \mapsto |\varphi(x)|$$

und

$$\theta : M \setminus \{o\} \to \mathbb{S}^{n-1},\ x \mapsto r(x)^{-1}\varphi(x).$$

Es ändert sich also, dass wir nicht nur die Existenz einer Isometrie

$$M \setminus \{o\} \to (0, R) \otimes_\psi \mathbb{S}^{n-1}$$

fordern, sondern auch Anforderungen an deren genaue Gestalt stellen.

Beweisen Sie:

(a) Für alle $x \in M$ gilt $\rho_{\mathbf{g}}(x, o) = r(x)$.

(b) Der metrische Raum $(M, \rho_{\mathbf{g}})$ ist genau dann vollständig, wenn $R = \infty$.

(2) Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $u \in \mathcal{D}'(M)$. Beweisen Sie, dass es eine größte offene Menge $O \subseteq M$ gibt, sodass $\langle u, \varphi \rangle = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(O)$.

Hinweis: Glatte Zerlegungen der Eins.

(3) Es sei $(M, \mathbf{g})$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $X, Y : M \to TM$ messbare Vektorfelder. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$M \to \mathbb{R},\ p \mapsto \mathbf{g}(p)(X_p, Y_p)$$

Borel-messbar ist.

(4) Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie, dass die in der Vorlesung definierten Operatoren

$$\nabla_{\mathbf{g}} : \mathcal{D}'(M) \to \vec{\mathcal{D}}'(M) \text{ bzw. } \operatorname{div}_\mu : \vec{\mathcal{D}}'(M) \to \mathcal{D}'(M)$$

Fortsetzungen von

$$\nabla_{\mathbf{g}} : C^\infty(M) \to \mathfrak{X}(M) \text{ bzw. } \operatorname{div}_\mu : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

sind. Zeigen Sie ferner, dass sich die Identität $\Delta_\mu = \operatorname{div}_\mu \circ \nabla_{\mathbf{g}}$ von $C^\infty(M)$ auf $\mathcal{D}'(M)$ fortsetzt.

(5) Es sei $(M, \mathbf{g}, \mu)$ eine gewichtete riemannsche Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie, dass für $u \in W^1_{\mathrm{loc}}(M, \mu)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ gilt

$$\nabla_{\mathbf{g}}(\varphi \cdot u) = \varphi \nabla_{\mathbf{g}} u + u \nabla_{\mathbf{g}} \varphi.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich eine Produktregel für die gewichtete Divergenz auf glatten Vektorfeldern.