Warum Außenseiter Chancen haben

Stefan Ankirchner

March 26, 2021

Im Pokal-Wettbewerb des DFB kommt es in den ersten Runden häufig zu Begegnungen zwischen Mannschaften mit unterschiedlichen Spielstärken. Z.B. kann ein Drittligist auf einen Erstligist stoßen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Drittligist gewinnt und der Erstligist ausscheidet?

Um diese Wahrscheinlichkeit näherungsweise zu bestimmen, treffen wir explizite Annahmen über die Anzahl der Torschüsse beider Mannschaften. Unter einem Torschuss verstehen wir hierbei einen Schuss oder einen Kopfstoß, der mit der Absicht getätigt wird, den Ball ins gegnerische Tor zu bringen.

Wir nehmen an, dass der Erstligist in den ersten 90 Spielminuten 20 Mal mal auf das Tor des Drittligisten schießt. Der Drittligist hingegen kommt nur zu 10 Torschüssen auf das gegnerische Tor. Des Weiteren nehmen wir an, dass der Erstligist im Mittel jeden zehnten Torschuss zu einem Tor verwandelt. Die Torschüsse des Drittligisten sind wegen der starken Defensive des Erstlisigsten nicht ganz so effizient. Nehmen wir an, dass nur jeder zwanzigste Torschuss des Drittligisten zu einem Tor führt. Die folgende Tabelle fasst unsere Annahmen zusammen:

	Drittligist	Erstligist
Torschüsse	10	20
Trefferquote	0.05	0.1

Aus diesen Annahmen folgt, dass der Drittligist in den ersten 90 Spielminuten in Erwartung 0.5 Tore schießt. Mit anderen Worten: im Mittel schießt er in jeder zweiten Partie gegen den Erstligisten ein Tor. Der Erstligist schießt im Mittel 2 Tore in einem Spiel gegen den Drittligisten. Insgesamt schießt also der Erstligist viermal so viele Tor wie der Drittligist. Vereinfacht kann man sagen, dass der Erstligist viermal stärker als der Drittligist ist.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für einen Sieg des Drittligisten benötigen wir die Verteilung der Anzahl der Tore, die jeweils beide Mannschaften schießen. Wir betrachten zunächst das konkrete Ereignis, dass von den zehn Versuchen des Drittligisten genau der vierte und siebte Versuch erfolgreich sind und die anderen nicht. Wir veranschaulichen dieses spezielle Ereignis mit der Folge 0001001000, wobei jede 1 für einen Erfolg steht. Wenn die Ausgänge der einzelnen Torschüsse unabhängig voneinander sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis 0001001000 gegeben durch $0,05^2 * 0,95^8$. Wieviele 0-1-Folgen der Länge 10 gibt es mit genau zwei Einsen? Stellen wir uns dazu vor, dass wir die beiden Einsen unterscheiden können. Dann gibt es für die erste Eins 10 Möglichkeiten und für die zweite 9. Insgesamt ergibt das $10*9$ Möglichkeiten, zwei unterschiedliche Einsen zu platzieren. Es gibt 2 Möglichkeiten, die beiden unterschiedlichen Einsen auf zwei Stellen zu verteilen. Damit folgt, dass es $\frac{10*9}{2}$ Folgen der Länge 10 gibt mit genau zwei Einsen. Wir erhalten also, dass der Drittligist mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{10*9}{2} * 0,05^2 * 0,95^8$ genau 2 Tore schießt.

Um eine Formel für die Verteilung herzuleiten, die sowohl für den Erstligisten als auch den Drittligisten anwendbar ist, abstrahieren wir die Fragestellung und ermitteln die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei n Torschüssen mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ genau k Tore fallen. Zunächst stellen wir fest, dass es

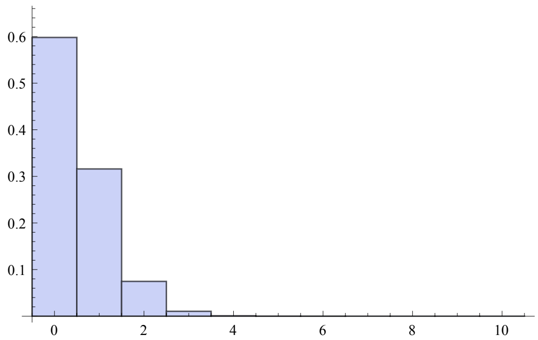
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{1}$$

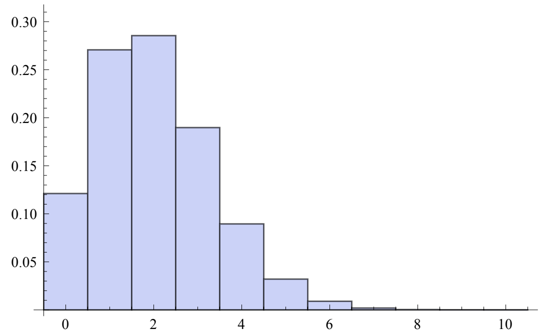
Möglichkeiten gibt, k Treffer auf n Versuche zu verteilen. Der Doppelpunkt auf der linken Seite der Gleichung (1) bedeutet, dass der linke Ausdruck durch den Rechten definiert ist. Sind die Ergebnisse der einzelnen Torschüsse unabhängig voneinander, dann werden genau k Tore erzielt mit der Wahrscheinlichkeit

$$B(n, p; k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{2}$$

Man sagt: die Anzahl der Tore ist binomialverteilt mit n Versuchen und Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Zurück zu unserer Ausgangsfrage: Für den Drittligisten gilt $n = 10$ und $p = 0.05$, und für den Erstligisten $n = 20$ und $p = 0.1$. Die Verteilung der Anzahl der Tore einer jeden Mannschaft kann mit folgenden Histogrammen veranschaulicht werden:





Das linke Histogramm beschreibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Drittligist in einer Begegnung mit dem Erstligisten wieviele Tore schießt. Die Höhe des Balken über 0 ist ca. 0.6. Dies bedeutet, dass der Drittligist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.6 kein Tor gegen den Erstligisten erzielt. Die Höhe des zweiten Balkens ist ca. 0.3; d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.3 schießt der Drittligist genau ein Tor. Das Histogramm auf der rechten Seite beschreibt die Verteilung der Anzahl der vom Erstligisten erzielten Tore.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden nach 90 Minuten ist

$$\sum_{k=0}^{10} B(10, 0.05; k)B(20, 0.1; k) \approx 0.18.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Drittligist nach 90 Minuten als Sieger feststeht, ist gegeben durch

$$\sum_{k=1}^{10} \left(B(10, 0.05; k) \sum_{j=0}^{k-1} B(20, 0.1; j) \right) \approx 0.08.$$

Die folgende Tabelle umfasst die Wahrscheinlichkeiten für die drei möglichen Ausgänge des Spiels nach 90 Minuten:

	Wahrscheinlichkeit
Erstligist gewinnt	0.74
Unentschieden	0.18
Drittligist gewinnt	0.08

Wir stellen fest, dass der Erstligist nach 90 Spielminuten nur mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0.75 als Sieger feststeht. Bei einem Unentschieden kommt es im Pokal-Wettbewerb zu einer Verlängerung. Wir nehmen an, dass der Erstligist in der Verlängerung 8 Mal auf das gegnerische Tor schießt und der Drittligist 4 Mal. Eine Berechnung wie für die ersten 90 Minuten zeigt, dass der Drittligist in der Verlängerung mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0.1 mehr Tore schießt als der Erstligist. Mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0.4 kommt es zu einem Elfmeterschießen. Wenn wir annehmen, dass der Drittligist im Elfmeterschießen mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 gewinnt, erhalten wir als Wahrscheinlichkeit für das Weiterkommen des Drittligisten

$$0.08 + 0.18 * (0.1 + 0.4 * 0.33) \approx 0.12.$$

Fazit: Unsere Näherungsrechnung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Drittligist in einer Pokalrunde einen Erstligist schlägt, ungefähr bei 0.1 liegt. Das ist erstaunlich hoch angesichts unserer Annahme, dass der Erstligist 4 mal häufiger trifft.

Für Profis ist das Ergebnis vermutlich weniger überraschend. So sagte Lukas Podolski nach dem verlorenen WM-Halbfinale gegen Italien 2006: "So ist Fußball. Manchmal gewinnt der Bessere."

Wie sieht es mit den Gewinnchancen von schwächeren Mannschaften in anderen Sportarten aus? In vielen anderen Sportarten, so z.B. im Basketball und Handball, erzielen die Mannschaften im Mittel sehr viel mehr Tore (bzw. Körbe oder Punkte) als im Fussball. Betrachten wir nun ein Handball-Spiel zwischen zwei unterschiedlich starken Mannschaften mit folgenden Merkmalen:

	schwaches Team	starkes Team
Torwürfe	10	20
Trefferquote	0.25	0.5

Die stärkere Mannschaft erzielt wieder viermal so viele Tore wie die Schwächere. Der relative Unterschied in der Spielstärke ist also wie bei dem obigen Fussballspiel zwischen dem Erstligisten und Drittligisten. Die Wahrscheinlichkeiten für die drei möglichen Ausgänge des Handballspiels sind in folgender Tabelle angegeben:

	Wahrscheinlichkeit
stärkeres Team gewinnt	0.996
Unentschieden	0.003
schwächeres Team gewinnt	0.001

Wir sehen, dass die viermal stärkere Handballmannschaft fast immer als Sieger vom Feld geht. Nur in einem Spiel von 1000 gewinnt die schwächere Handballmannschaft.

Wir fassen unsere Erkenntnisse zusammen. Im Fussball hat eine schwächere Mannschaft beachtliche Gewinnchancen. In Sportarten mit höheren Trefferquoten gewinnt die stärkere Mannschaft fast immer. Im Fussball sind somit auch Partien zwischen zwei unterschiedlich starken Mannschaften spannend. Es ist somit kein Zufall, dass Fussball die populärste Sportart ist.

Wir können aus den Erkenntnissen dieses Kapitels eine Strategieempfehlung ableiten. Falls zwei unterschiedlich starke Mannschaften aufeinander treffen, sollte die schwächere Mannschaft eine defensive Strategie wählen, um die Trefferquoten insgesamt zu senken. Umgekehrt sollte die stärkere Mannschaft versuchen, die Trefferquoten zu erhöhen. Tatsächlich beobachtet man im Profifussball, dass sich Mannschaften oft genau so verhalten.