Warum Fussball fair ist

Stefan Ankirchner

September 21, 2020

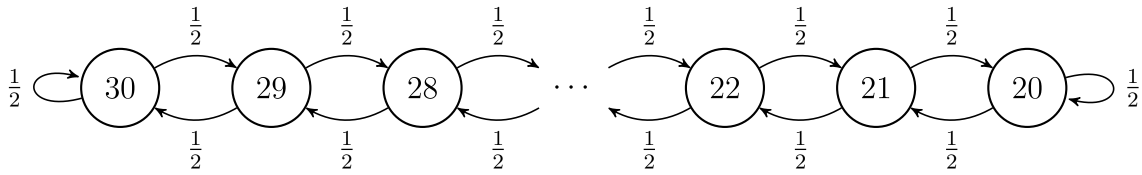
Wie wir im vorhergenden Kapitel gesehen haben, ist es bei einem Aufeinandertreffen zweier unterschiedlich starker Fussballmannschaften nicht unwahrscheinlich, dass die schlechtere Mannschaft als Sieger vom Platz geht. Bedeutet dies nun, dass Fussball ein unfairer Sportart ist? Nein, denn über die Saison verteilt wird die bessere Mannschaft häufiger gewinnen. Man kann beweisen, dass die mittlere Punktzahl, die eine Mannschaft in ihren Spielen erzielt, gegen den sogenannten Erwarungswert der erzielten Punkte konvergiert. Man bezeichnet diese Erkenntnis der Wahrscheinlichkeitstheorie als *Gesetz der großen Zahl*.

Um dieses Gesetz genauer zu formulieren, bezeichnen wir mit $X_1, X_2, \ldots$ die von einer Mannschaft erzielten Punkte in den einzelnen Bundesligaspielen. Jedes X_i kann die drei Werte $0, 1$ und 3 annehmen. $X_1, X_2, \ldots$, sind Beispiele für sog. Zufallsvariablen. Zunächst nehmen wir an, dass die Ergebnisse der einzelnen Spiele unabhängig voneinander sind und jedes Spiel mit der gleichen W'keit gewonnen wird. Mit anderen Worten, jede Zufallsvariable X_i nimmt den Wert 3 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p an. Des Weiteren gelte, dass jedes Spiel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit q verloren wird. Man schreibt kurz $P(X_i = 3) = p$ bzw $P(X_i = 0) = q$. Die Wahrscheinlichkeiten aller Spielausgänge müssen sich zu 1 addieren. Deshalb gilt $P(X_i = 0) = 1 - p - q$. Der Erwartungswert einer Zufallsvariable bestimmt man, indem man alle möglichen Ergebnisse mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten multipliziert und dann alle Produkte aufsummiert. Der Erwartungswert von X_i ist folglich

$$E(X_i) = 3 * p + 1 * (1 - p - q) + 0 * q = 2p + 1 - q.$$

Das Gesetz der großen Zahl besagt nun, dass die mittlere Anzahl an gewonnen Punkten $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ gegen den Erwartungswert $E(X_i)$ konvergiert, wenn $n \to \infty$. Dies bedeutet, dass nach vielen Spielen die mittlere Anzahl an gewonnen Punkten tatsächlich mit dem Erwartungswert übereinstimmt. Es gleicht sich alles aus.

Bei unserer Überlegung haben wir der Einfachheit angenommen, dass die Ausgänge der einzelnen Spiele unabhängig voneinander und identisch verteilt sind. Diese Annahme ist nicht immer zutreffend. Fallen z.B. einige Top-Spieler gleichzeitig aufgrund einer Verletzung oder Krankheit für mehrere Spiele aus, so wird die Mannschaft in diesen Spielen mit größerer W'keit verlieren. Die Spielausgänge sind somit nicht unabhängig voneinander. Die Wahrscheinlichkeitstheorie lehrt uns, dass auch unter Berücksichtigung solcher Fälle das Gesetz der großen Zahl gilt. Um dies zu illustrieren, betrachten wir ein einfaches Beispiel: Wir nehmen an, dass der Kader aus 30 Spielern besteht. Wieviele Spieler in einem Spiel einsatzbereit sind, wird durch das folgende Bild beschrieben:



Das Bild ist wie folgt zu interpretieren: Falls an einem Spieltag 30 Spieler einsetzbar sind, dann sind am darauffolgenden Spieltag wieder 30 oder nur 29 einsetzbar, jeweils mit W'keit $\frac{1}{2}$. Können an einem Spieltag genau 29 eingesetzt werden, so sind es am darauffolgenden Spieltag entweder 30 oder nur 28, wobei beides mit W'keit $\frac{1}{2}$ eintritt. Sind an einem Spieltag 28 einsetzbar, dann am darauffolgenden mit W'keit $\frac{1}{2}$ jeweils 29 oder 27. Und so weiter ... Unsere Annahmen implizieren, dass es gute Phasen gibt, in denen die meisten Spieler einsetzbar sind und schlechte Phasen, in denen viele ausfallen. Wir bezeichnen mit $M_1, M_2, \ldots$ die Anzahl der einsetzbaren Spieler am Spieltag 1, Spieltag 2, usw. Die Folge $M_1, M_2, \ldots$ ist ein Beispiel für eine sogenannte Markov-Kette. Unsere Markov-Kette kann die Zustände $20, 21, 22, \ldots, 30$ annehmen. Für jeden Zustand $x \in \{20, 21, 22, \ldots, 30\}$ kann man zeigen: nach vielen, zB 50, Schritten, ist die Kette mit einer W'keit von ungefähr $\frac{1}{11}$ in dem Zustand x. Und dies ist völlig unabhängig davon, von welchem Zustand die Kette gestartet ist.

Es bezeichne nun μ_n die erwartete Punktezahl an einem Spieltag, an dem n Spieler einsetzbar sind. Es ist plausibel anzunehmen, dass $\mu_{20} < \mu_{21} < \ldots < \mu_{30}$ gilt. Man kann nun zeigen, dass das Mittel der erzielten Punkte $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ gegen

$$\frac{1}{11}(\mu_{20} + \mu_{21} + \cdots + \mu_{30})$$

konvergiert, wenn $n \to \infty$. Also auch Verletzungspech gleicht sich wieder aus.