

# Warum Absteiger oft wieder aufsteigen

Stefan Ankirchner

September 25, 2020

Es passiert häufig, dass ein Absteiger in der darauffolgenden Spielzeit wieder aufsteigt. Woran liegt das? Die häufigen Wiederaufstiege sind ein Indiz dafür, dass viele absteigende Mannschaften nicht an Leistungspotential eingebüßt haben. Oft erklärt man den Abstieg durch eine vorübergehende Schwächephase; manchmal wird die Spieltaktik als Grund ins Feld geführt, und oft muss der Coach als Grund für den Abstieg herhalten. Bei all diesen Erklärungsversuchen sollte man nicht ausblenden, dass ein Abstieg auch auf Zufall zurück geführt werden kann. In diesem Kapitel untersuchen wir, wie plausibel es ist, einen Abstieg mit Zufall zu erklären.

Dazu bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine durchschnittliche Bundesligamannschaft absteigt, nicht weil sie an Leistungspotenzial einbüßt, sondern weil sie über die gesamte Saison Pech hat (oftmals die Latte trifft, knapp am Tor vorbeischießt etc). Dazu bezeichnen wir mit  $X_1, X_2, \dots, X_{34}$  die Punkte, die eine Mannschaft in den einzelnen Spielen einer Bundesligasaison erzielt. Die Gesamtpunktzahl am Ende der Saison ist die Summe  $S = \sum_{i=1}^{34} X_i$ .

Wir nehmen an, dass die Mannschaft jedes einzelne Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.4 gewinnt und mit einer W'keit von 0.4 verliert. Mit einer W'keit von 0.2 spielt die Mannschaft unentschieden. In jedem Spiel ist somit die erwartete Punktzahl  $\mu = 1.4$  und die Standardabweichung der erzielten Punkte liegt bei

$$\sigma = \sqrt{0,4 * 1,4^2 + 0,4 * 1,6^2 + 0,2 * 0,4^2} \approx 1,36.$$

Wir nehmen weiter an, dass die Ausgänge der einzelnen Spiele unabhängig voneinander sind. Diese Annahme erlaubt es, die Verteilung der Summe  $S$  mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes (ZGS) zu approximieren. Zunächst halten wir fest, dass der Erwartungswert von  $S$  gegeben ist durch  $34 * 1,4 = 47,6$ . Die Standardabweichung von  $S$  beträgt  $\sqrt{34} * \sigma \approx 7,91$ . Der ZGS besagt, dass die standardisierte Summe

$$Z = \frac{S - 47,6}{7,91}$$

annähernd standardnormalverteilt ist. D.h. für beliebige  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $P(Z \leq a) \approx \Phi(a) := \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ . Die Funktion  $\Phi$  ist die sog. Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Die Anzahl der Punkte, die für den Klassenerhalt genügen, ist von Jahr zu Jahr verschieden. Am Ende der Saison 2016/17 hatte der Drittlezte der Tabelle 37 Punkte. In den Spielzeiten danach hatten die Drittlezten etwas weniger Punkte. In unserem Gedankenexperiment setzen wir die Grenze für den Abstieg bei 35. D.h. wir gehen davon aus, dass die Mannschaft abstiegt, falls sie nicht mehr als 35 Punkte erzielt. Wie groß ist diese W'keit?

Mit dem ZGS folgt

$$\begin{aligned} P(S \leq 35) &= P\left(Z \leq \frac{35 - 47,6}{7,91}\right) \\ &\approx \Phi(-1,59) \\ &\approx 0,056. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Abstieg liegt also bei ca. 0,056. Mit andern Worten: eine durchschnittlich starke Mannschaft steigt ungefähr alle zwanzig Jahre ab. Es ist somit nicht unwahrscheinlich, dass unter den Absteigern eine Mannschaft dabei ist, die vor allem aufgrund von Pech abstiegt.

Falls ein Abstieg dem Zufall geschuldet ist, und nicht einem Potenzialeinbruch, dann ist der Wiederaufstieg in der darauffolgenden Saison recht wahrscheinlich. Um dies zu begründen, führen wir unser Gedankenexperiment mit folgenden Annahmen fort: In der 2. Liga zählt die abgestiegene Mannschaft zu den Stärkeren. Wir nehmen an, dass die Mannschaft jedes einzelne Spiel in der 2. Liga mit Wahrscheinlichkeit 0.6 gewinnt und mit W'keit 0.2 verliert. Mit einer W'keit von 0.2 spielt die Mannschaft unentschieden. In jedem Spiel in der 2. Liga ist somit die erwartete Punktzahl  $\mu = 2$  und die Standardabweichung der erzielten Punkte ist  $\sigma = \sqrt{0,6 * 1 + 0,2 * 1 + 0,2 * 2^2} = \sqrt{1,6}$ .

Wir nehmen an, dass eine Mannschaft mindestens 66 Punkte benötigt, um in die 1. Liga aufzusteigen. Mit dem ZGS ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Mannschaft in der 2. Liga mindestens 66 Punkte holt, näherungsweise gegeben durch

$$\begin{aligned} P(S \geq 66) &= 1 - P(S \leq 65) = 1 - P\left(\frac{S - 68}{\sqrt{34 * 1,6}} \leq \frac{65 - 68}{\sqrt{34 * 1,6}}\right) \\ &\approx \Phi(0,41) \\ &\approx 0,66. \end{aligned}$$

D.h. in zwei Drittel aller Fälle steigt die Mannschaft in der darauffolgenden Saison wieder auf.

Wir fassen zusammen: Es ist nicht unwahrscheinlich, dass eine durchschnittliche Mannschaft aufgrund von Pech abstiegt. In der darunterliegenden Liga ist die abgestiegene Mannschaft überdurchschnittlich stark. Dies führt dazu, dass die Mannschaft mit großer Wahrscheinlichkeit nach einer Saison wieder aufsteigt. Mit Zufall lässt sich also plausibel erklären, warum Absteiger häufig wieder aufsteigen.