

Warum immer dieselbe Mannschaft Rekordmeister ist

Stefan Ankirchner

November 14, 2020

In vielen Ligen ist immer dieselbe Mannschaft Rekordmeister. Ist ein Rekordmeister tatsächlich über viele Jahre hinweg besser als die anderen Mannschaften derselben Liga oder kann das auch etwas mit Zufall zu tun haben?

Um diese Frage zu beantworten führen wir wieder ein Gedankenexperiment durch. Wir stellen uns vor, dass es in einer Liga über Jahrzehnte hinweg zwei Mannschaften gibt, die ungefähr gleich stark sind und zugleich deutlich stärker als die anderen Mannschaften derselben Liga. Dies ist z.B. der Fall mit Real Madrid und FC Barcelona in der Primera Division.

Inspiziert durch das spanische Beispiel bezeichnen wir im Folgenden die beiden stärkeren Mannschaften mit "Real" und "FC". Da beide gleichstark sind und alle anderen Mannschaften deutlich schwächer, nehmen wir der Einfachheit an, dass in jeder Saison eine der beiden Mannschaften Meister wird. Weiterhin modellieren wir die Ausgänge der einzelnen Spielzeiten mit fairen Münzwürfen: für jede Saison wird eine Münze geworfen - erscheint Kopf (K), gewinnt Real, und erscheint Zahl (Z), so gewinnt der FC.

Die Mannschaft, die nach n Münzwürfen am häufigsten gewonnen hat, ist Rekordmeister nach der n -ten Saison. Da Real und FC gleichstark sind, könnte man erwarten, dass beide über die Jahre hinweg ungefähr gleich oft Rekordmeister sind. Ist diese Vermutung richtig? Dies wollen wir im Folgenden untersuchen.

Wir betrachten zunächst nur die ersten zehn Spielzeiten und bestimmen die Wahrscheinlichkeit, dass Real nach jeder der ersten 10 Spielzeiten Rekordmeister ist. Wir stellen die Ergebnisse der ersten 10 Spielzeiten mit Hilfe einer Folge von "Z" und "K" dar. Zum Beispiel bedeutet die Folge "ZKKKZZKKZK", dass FC in der ersten Saison Meister war, Real in der 2. bis 4. Saison, Barcelona wieder in der 5. und 6., usw. Es gibt insgesamt 2^{10} verschiedene "ZK"-Folgen der Länge 10. Jede Folge tritt mit derselben Wahrscheinlichkeit ein, also mit Wahrscheinlichkeit $1/2^{10}$.

Zu jeder "ZK"-Folge konstruieren wir eine zufällige Folge aus natürlichen Zahlen wie folgt: wir starten bei 0. Jedes Mal, wenn K erscheint, gehen wir um +1 nach oben, und bei jedem Z um -1 nach unten. Für jede "ZK"-Folge erhalten wir eine Folge von natürlichen Zahlen, welche wir abstrakt mit X_0, X_1, \dots, X_{10} bezeichnen. X_n gibt an,

wieviele Meisterschaften nach n Spielzeiten Real mehr gewonnen hat als FC. Beachte: Ist der Wert negativ, so hat der FC mehr Meisterschaften gewonnen.

Zum Beispiel erhalten wir aus der Folge "ZKKKZZKKZK" die Werte $(X_0, X_1, \dots, X_{10}) = (0, -1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 2)$. Im folgenden Bild ist diese Folge graphisch dargestellt:

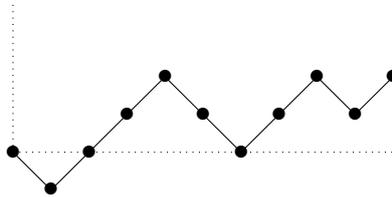


Bild 1: Ein Beispiel für den Verlauf der ersten 10 Spielzeiten

Wenn der Wert von X_n oberhalb der x -Achse liegt, dann ist Real nach der n -ten Spielzeit Rekordmeister. Liegt der Wert von X_n unterhalb der x -Achse, dann ist FC Rekordmeister. Liegt der Wert von X_n genau auf der x -Achse, so haben beide Mannschaften gleich viele Meisterschaften in den ersten n Spielzeiten gewonnen. In diesem Fall sind beide Rekordmeister, allerdings nicht Alleinige.

Real ist genau dann nach jeder der ersten 10 Spielzeiten Rekordmeister, wenn der Graph von X_0, X_1, \dots, X_{10} nirgends unterhalb der x -Achse ist. Man kann zeigen, dass es genau $\binom{20}{10} = \frac{20!}{10!10!}$ Folgen X_0, X_1, \dots, X_{10} gibt, die nirgends negativ werden. Somit ist Real Rekordmeister nach allen zehn Spielzeiten mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{\binom{20}{10}}{2^{10}} \approx 0,176.$$

Aus Symmetriegründen ist auch der FC nach jeder der ersten 10 Spielzeiten Rekordmeister mit einer Wahrscheinlichkeit von ca 0,176. Somit liegt die Wahrscheinlichkeit, dass über die ersten zehn Spielzeiten immer dieselbe Mannschaft Rekordmeister ist, bei ungefähr 0,35. Und das obwohl wir angenommen haben, dass beide gleich stark sind.

Man kann zeigen, dass auch nach sehr vielen Spielzeiten es wahrscheinlich ist, dass eine Mannschaft viel häufiger Rekordmeister war als die andere. Dies folgt aus dem sogenannten Arkussinus-Gesetz. Um dieses Gesetz zu formulieren, bezeichnen wir im Folgenden mit $A_n(x)$ das Ereignis, dass Real bis zum n -ten Jahr nach mindestens $x \cdot 100\%$ aller Spielzeiten Rekordmeister war. Das Arkussinus-Gesetz besagt nun, dass die Wahrscheinlichkeit von $A_n(x)$ gegen den Integralwert $\int_x^1 \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}} dy$ konvergiert. Man kann dies prägnant wie folgt ausdrücken:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n(x)) = \int_x^1 \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}} dy, \quad x \in [0, 1]. \quad (1)$$

Das Integral lässt sich vereinfachen zu $1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})$, was den Namen "Arkussinus-Gesetz" erklärt. Einen Beweis des Gesetzes findet man z.B in [1].

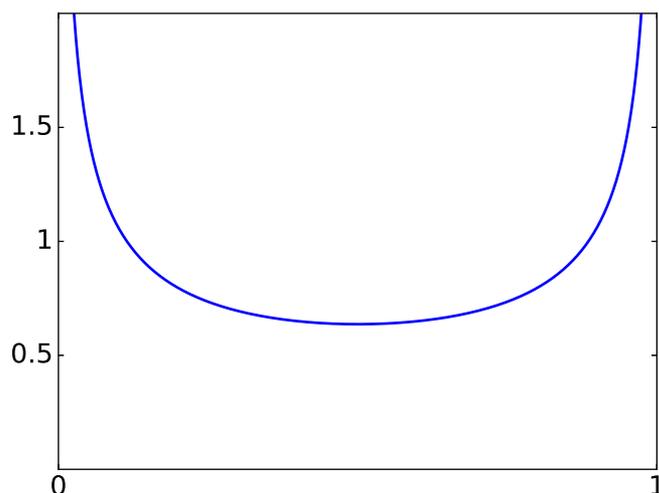


Bild 2: Die Dichte der Arkussinus-Verteilung.

Betrachten wir nun das Beispiel $x = 0,8$. Es gilt $1 - \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{0,8}) \approx 0,30$. Somit liegt die Wahrscheinlichkeit, dass nach vielen Jahren Real nach mindestens 80% aller bisherigen Spielzeiten Rekordmeister war, bei ungefähr 0,30. Aus Symmetriegründen gilt dasselbe auch für den FC. Folglich ist in 60% der Fälle eine der beiden Mannschaften nach mindestens 80% aller Spielzeiten Rekordmeister gewesen. Mit anderen Worten: es ist sehr wahrscheinlich, dass meistens dieselbe Mannschaft Rekordmeister war.

Unter dem Integral in Gleichung (1) erscheint die Funktion $y \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}$, $y \in [0, 1]$. Dies ist die sogenannte Dichtefunktion der Arkussinus-Verteilung. Im Bild 2 ist der Graph der Dichtefunktion dargestellt. Vereinfacht lässt sich sagen: je größer der Wert der Dichtefunktion an einer Stelle y , desto wahrscheinlicher wird der Wert y angenommen. Die Dichtefunktion der Arkussinus-Verteilung hat ein Minimum bei $\frac{1}{2}$ und konvergiert gegen ∞ wenn $y \uparrow 1$ oder $y \downarrow 0$. Dies zeigt, dass es wahrscheinlicher ist, dass der Prozentsatz an Spielzeiten, in denen Real Rekordmeister war, einen Wert nah bei 0 oder 100 annimmt als einen Wert bei 50. Auch das Bild 2 verdeutlicht also, dass es viel wahrscheinlicher ist, dass eine der beiden Mannschaften die meiste Zeit Rekordmeister war, als dass beide ungefähr gleich oft Rekordmeister waren.

Bei unseren Betrachtungen bislang haben wir eine Mannschaft auch als Rekordmeister gesehen, wenn sie genau so viele Meisterschaften gewonnen hat wie die andere Top-Mannschaft. Auch wenn wir hier strenger sind und eine Mannschaft nur als Rekordmeister bezeichnen, falls sie mehr Meisterschaften gewonnen hat, dann ändert sich die Aussage des Arkussinus-Gesetzes nicht. In der Tat kann man zeigen, dass über lange Zeiträume es sehr selten passiert, dass beide Mannschaften gleich oft Meister waren.

Übrigens: seit 1963 ist Real Madrid durchgehend Rekordmeister der Primera Division.

References

- [1] S. Ankirchner und N. Kazi-Tani. Lessons from coin tosses. https://www.stochastik.uni-jena.de/stochastik_multimedia/Publikationen+Ankirchner/Lessons_from_coin_tosses4.pdf. 2020.