Warum Profi-Mannschaften das Risiko variieren

Stefan Ankirchner

27. Dezember 2020

Liegt eine Profi-Fußballmannschaft gegen Ende eines Spiels zurück, so wechselt sie häufig zu einer offensiveren Spielweise. Zum Beispiel kann man oft beobachten, dass ein Verteidiger gegen einen Stürmer ausgetauscht wird. Durch den zusätzlichen Stürmer wird die Wahrscheinlichkeit erhöht, dass die eigene Mannschaft noch ein Tor erzielt. Es erhöht sich jedoch auch die Trefferwahrscheinlichkeit des Gegners, da nun mit weniger Spielern verteidigt wird.

Auch wenn die Trefferwahrscheinlichkeit des Gegners um mehr steigt als die der eigenen Mannschaft, ist es bei einem Rückstand sinnvoll, gegen Ende des Spiels zu einer offensiveren Strategie zu wechseln. Ein weiterer Gegentreffer fällt nicht stark ins Gewicht, weil man sowieso schon hinten liegt. Gelingt allerdings der Ausgleich, dann fährt man mit Punkten nach Hause. Intuitiv ist klar, dass die zurückliegende Mannschaft gegen Ende offensiver spielen soll. Doch ab wann genau sollte sie dies tun?

Diese Frage kann man mit Methoden der stochastischen Optimierung beantworten. Wir müssen dazu ein mathematisches Modell aufstellen, das hinreichend genau die Spielsituation beschreibt. Wir beschreiben zunächst ein Modell, in dem die eigene Mannschaft einmalig einen Verteidiger gegen einen Stürmer auswechseln kann.

Modell

Wir bezeichnen mit X_n, $n \in \{1, \ldots, 90\}$, die Tordifferenz am Ende der Minute n. Wir gehen davon aus, dass das Spiel nach 90 Minuten vorbei ist (wir messen die Zeit ohne Unterbrechungen). Die endgültige Tordifferenz X_{90} bestimmt, mit wieviel Punkten jede Mannschaft nach Hause fährt. Falls $X_{90} \geq 1$, erhalten wir 3 Punkte. Wenn $X_{90} = 0$, gibt es ein Unentschieden und jedes Team bekommt einen Punkt. Wenn $X_{90} \leq -1$, gehen wir mit Null Punkten nach Hause. Die erzielten Punkte können kurz mit $R(X_{90})$ beschrieben werden, wobei

$$R(k) = \begin{cases} 3, & \text{if } k \geq 1, \\ 1, & \text{if } k = 0, \\ 0, & \text{if } k \leq -1. \end{cases}$$

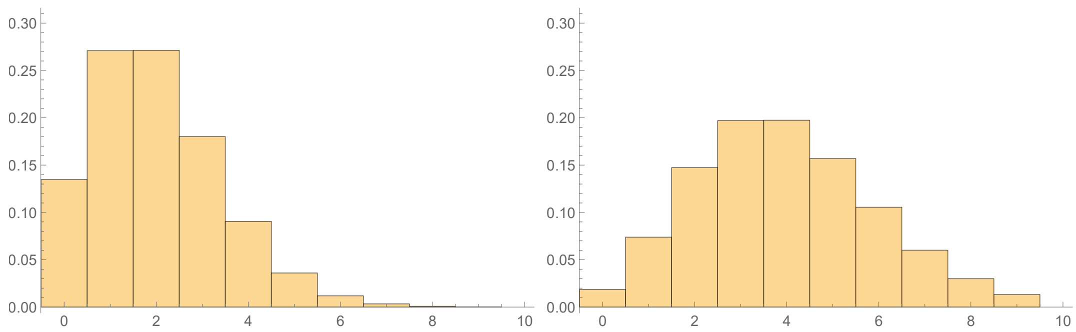

Abbildung 1: Links: Torverteilung der eigenen Mannschaft nach der Auswechslung. Rechts: Torverteilung des Gegners nach der Auswechslung

Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst an, dass das eigene Team ein Mal im Laufe des Spiels einen Verteidiger gegen einen Stürmer wechseln, aber sonst keine Auswechslungen vornehmen kann (andere Fälle s.u.). Eine Wechselstrategie beschreibt für jede Spielminute und jeden Spielstand, ob man eine Auswechslung vornimmt oder nicht, sofern man nicht bereits zu einer früheren Minute gewechselt hat. Formal definieren wir eine Wechselstrategie als eine Funktion $a : \{0, 1, \dots, 89\} \times \mathbb{Z} \to \{J, N\}$. Falls $a(n, k) = J$, dann wechselt man bei einer Tordifferenz von k zur Zeit n aus, sofern dies noch möglich ist. Falls $a(n, k) = N$, dann wechselt man nicht.

Wir nehmen weiter an, dass bei gleichbleibender Strategie die Anzahl der geschossenen Tore für beide Teams jeweils Poisson-verteilt ist. Das bedeutet:

$$\text{Wahrscheinlichkeit für } m \text{ Tore} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$$

Der Parameter λ misst die Intensität mit der Tore erzielt werden: Je größer λ, desto häufiger trifft man. Weiterhin gilt, dass die erwartete Anzahl mit λ übereinstimmt.

Vor der Auswechslung seien beide Mannschaften gleich stark und treffen Tore mit einer Intensität von 1 pro Spiel. Nach der Auswechslung trifft die eigene Mannschaft mit einer Intensität von 2, und die gegnerische Mannschaft mit einer Intenstität von 4. Dies impliziert insbesondere, dass in Erwartung die gegnerische Mannschaft nach dem Wechsel doppelt so viele Tore schießt wie die Heimmannschaft.

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Torintensitäten vor und nach der Auswechslung.

	vorher	nachher
Tor-Intensität des eigenen Teams	1	2
Tor-Intensität des Gegners	1	4

Schließlich nehmen wir noch an, dass unser Team die erwartete Punktzahl maximieren will. Eine Wechselstrategie ist optimal, falls mit keiner anderen Wechselstrategie eine größere erwartete Punktzahl erzielt werden kann.

Optimale Wechselstrategie

Wir erklären nun, wie man eine optimale Wechselstrategie bestimmen kann. Eine wichtige Hilfsgröße dabei ist die maximale erwartete Punktzahl nach der Restspieldauer, d.h. der Erwartungswert der erzielten Punkte der eigenen Mannschaft, falls sie sich im restlichen Verlauf des Spiels optimal verhält.

Wir bezeichnen mit $V(n,k)$ die maximal erwartete Punktzahl bei einer Tordifferenz von k zur Zeit n, falls noch *nicht* vor n gewechselt wurde. Wir erhalten somit eine Funktion V mit Definitionsbereich $\{0,1,\ldots,90\} \times \mathbb{Z}$. Es ist nicht möglich eine explizite Formel für V zu bestimmen. Wir können aber unter Verwendung numerischer Verfahren V bis auf beliebig viele Nachkommastellen durch einen Computer exakt berechnen lassen.

Grundlage der Berechnung von V ist eine Rückwärtsrekursion vom Ende des Spiels in Minutenschritten bis zum Anfang, sprich entlang der Zeiten $90, 89, \ldots, 1, 0$. Wir stellen zunächst fest, dass $V(90,k) = R(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Um $V(89,\cdot)$, die Werte zur Zeit $n = 89$ zu bestimmen, vergleichen wir die erwartete Punktzahl bei einem Wechsel mit der erwarteten Punktzahl ohne Wechsel.

- Erwartete Punktzahl bei einem Wechsel:

$$X(89,k) = \sum_{h,g\geq 0} \mathrm{Poi}_{2/N}(h)\mathrm{Poi}_{4/N}(g)R(k+h-g)$$

- Erwartete Punktzahl ohne Wechsel:

$$C(89,k) = \sum_{h,g\geq 0} \mathrm{Poi}_{1/N}(h)\mathrm{Poi}_{1/N}(g)R(k+h-g)$$

Die maximal erwartete Punktzahl bei einem Spielstand k zur Zeit $n = 89$ ist somit

$$V(89,k) = \max\{X(89,k), C(89,k)\}.$$

Hat man $V(89,\cdot)$ bestimmt, so kann man auf dieselbe Weise die Werte $V(88,\cdot)$ bestimmen, und dann $V(87,\cdot)$, und so weiter.

Für den allgemeinen Rekursionsschritt $n+1 \longrightarrow n$ vergleicht man folgende Werte:

- erwartete Punktzahl bei einem Wechsel:

$$X(n,k) = \sum_{h,g\geq 0} \mathrm{Poi}_{2(N-n)/N}(h)\mathrm{Poi}_{4(N-n)/N}(g)R(k+h-g) \tag{1}$$

- erwartete Punktzahl ohne Wechsel:

$$C(n,k) = \sum_{h,g\geq 0} \mathrm{Poi}_{1/N}(h)\mathrm{Poi}_{1/N}(g)V(n+1,k+h-g) \tag{2}$$

Rückstand	Wechsel optimal ab Minute
1 Tor	75
2 Tore	59
3 Tore	42

Tabelle 1: Optimale Wechselminute im irreversiblen Fall

Bei einem Spielstand k zur Zeit n ist die maximal erwartete Punktzahl

$$V(n,k) = \max\{X(n,k), C(n,k)\}. \tag{3}$$

Mit Hilfe der Werte $X(n,k)$ und $V(n,k)$ können wir eine optimale Wechselstrategie beschreiben. Es sei a^* die Wechselstrategie mit

$$a^*(n,k) = \begin{cases} J, & \text{falls } X(n,k) > C(n,k), \\ N, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $n \in \{0, 1, \dots, 89\}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Nach Konstruktion maximiert a^* die erwartete Punktzahl über das gesamte Spiel und ist somit optimal.

Wie führt man die Rekursion praktisch durch? Zunächst schränkt man sich auf eine geeignete endliche Teilmenge des Definitionsbereichs von V ein. Für Tordifferenzen $k \geq 10$ ist die Wahrscheinlichkeit, nicht als Sieger vom Platz zu gehen, extrem klein. Umgekehrt, ist die Tordifferenz $k \leq -10$, so ist die Wahrscheinlichkeit, noch Punkte zu erzielen, ebenfalls extrem klein. Man kann deshalb $V(n,k) = 3$ für alle $k \geq 10$ setzen und $V(n,k) = 0$ für alle $k \leq -10$.

Die Werte $V(n,k)$ mit $k \in \{-9, -8, \dots, 8, 9\}$ werden nun mit Hilfe der Rekursion näherungsweise berechnet. Die exakten Werte der Summen in (1) und (2) können nicht bestimmt werden. Allerdings sind die Terme für h und g größer als 15 extrem klein. Man erhält eine sehr gute Näherung der Summenwerte, wenn man nur über alle Paare $(h, g) \in \{0, 1, \dots, 15\}^2$ summiert.

Die Rechnungen in jedem einzelnen Rekursionsschritt sind sehr ähnlich und können mit Hilfe eines Computers durchgeführt werden. Aus den Ergebnissen lassen sich folgende Schlüsse ziehen: Liegt man ein Tor hinten, dann sollte man zu Beginn der 75. Spielminute wechseln. Bekommt man nach der 75. Minuten irgendwann einen Gegentreffer und liegt dadurch hinten, dann sollte man sofort nach dem Gegentreffer wechseln. Liegt man zwei Tore zurück, dann sollte man bereits zu Beginn der 59. Spielminute wechseln. Bei 3 Toren Rückstand ist ein Wechsel bereits in der 42. Minute optimal. Diese Ergebnisse sind in der Tabelle 1 zusammengefasst.

Modellvarianten

Eine Annahme des beschriebenen Modells ist, dass wir nur 1 Mal wechseln und die Auswechslung nicht rückgängig machen können. In einigen Situationen mag diese Annahme

Rückstand	Wechsel optimal ab Minute
1 Tor	59
2 Tore	32
3 Tore	7

Tabelle 2: Optimale Wechselminute im reversiblen Fall

passend sein, zum Beispiel wenn bereits mehrmals gewechselt wurde und die Mannschaft in der Tat nur noch einmal wechseln darf. Es gibt allerdings auch Spiele, zu der diese Annahme nicht passt. Man stelle sich eine Mannschaft vor, die einen Spieler hat, den man sowohl als Verteidiger als auch als Stürmer einsetzen kann. In diesem Fall ist es kein Problem mehrmals zwischen der offensiven und defensiven Strategie zu wechseln. Eine optimale Strategie in einer Modellvariante, bei der beliebig oft gewechselt werden kann, lässt sich ebenfalls mit Hilfe einer Rekursion bestimmen. Unsere Berechnungen zeigen, dass man in diesem Fall bei einem Rückstand bereits früher zur offensiven Strategie wechselt. Die Tabelle 2 fasst zusammen, ab welcher Minute ein Wechsel optimal ist in Abhängigkeit von der Höhe des Rückstands.

Viele weitere Modellvarianten sind denkbar: Modelle mit einer festen Anzahl an Wechselmöglichkeiten (z.B. 3 Wechsel); Modelle mit mehr als zwei Strategien; Modelle, in denen auch der Gegner aus einer Menge an Strategien wählen kann. Falls beide Mannschaften Strategien wählen können, dann greift man auf das Konzept eines Nash-Gleichgewichts zurück um zu beschreiben, wie sich beide Mannschaften optimal aufeinander einstellen.

Jede Modellvariante liefert vermutlich eine etwas andere Antwort darauf, ab welchem Zeitpunkt eine zurückliegende oder in Führung liegende Mannschaft einen Strategiewechsel vollziehen sollte. Die Modelle helfen dabei, ein Gefühl dafür zu bekommen, unter welchen Bedingungen und ab wann ungefähr ein Strategiewechsel sinnvoll ist.