All I want for Christmas is ..... math!

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

Stefan Ankirchner

Weihnachten 2023

Whamageddon

Regeln:

- Spieldauer: 1. bis 24.12.
- Sobald man *Last Christmas* hört, hat man verloren und muss #Whamageddon posten
- Ziel: man hört kein einziges Mal *Last Christmas*, oder möglichst spät

`https://whamageddon.com`

Überleben in der Goethe-Galerie

Problem: Man will 1 Stunde shoppen. Wie lässt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit maximieren?

Annahmen:

- In jedem Geschäft läuft eine Playlist
- In jeder Playlist wird im Abstand von 1 Stunde immer wieder *Last Christmas* gespielt.
- jedes Lied dauert ca 3 Minuten

Optimal shop hopping

1. **Versuch:** 1 Stunde in 1 Geschäft

$$\text{Überlebenswahrscheinlichkeit } = 0$$

2. **Versuch:** 1/2 Stunde in 2 Geschäften

$$\text{Überlebensw'keit } = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

3. **Versuch:** 1/4 Stunde in 4 Geschäften

$$\text{Überlebensw'keit } = (1 - \frac{1}{4})^4 = \frac{81}{256} \approx 0,31$$

Optimal shop hopping

Überlebensw'keit, falls $1/n$ Stunde in n Geschäften:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Beachte

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \approx 0,37$$

Problem zu stark vereinfacht, denn....

- auch wenn man nur wenige Sekunden in einem Geschäft bleibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit *Last Christmas* zu hören $\frac{1}{20}$ (keine Konvergenz gegen 0).
- Berechung nimmt an, dass beim Eintreten in ein Geschäft ein neues Lied beginnt.

Neuer Versuch....

- 30 Minuten in 2 Geschäften
$$\text{Überlebensw'keit } = (1 - \frac{11}{20})^2 = \frac{81}{400} \approx 0,20$$
- 15 Minuten in 4 Geschäften
$$\text{Überlebensw'keit } = (1 - \frac{6}{20})^4 = \left(\frac{7}{10}\right)^4 \approx \mathbf{0{,}24}$$
- 12 Minuten in 5 Geschäften
$$\text{Überlebensw'keit } = (1 - \frac{5}{20})^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^5 \approx 0,23$$
- 6 Minuten in 10 Geschäften
$$\text{Überlebensw'keit } = (1 - \frac{3}{20})^{10} = \left(\frac{17}{20}\right)^{10} \approx 0,19$$
- 3 Minuten in 20 Geschäften
$$\text{Überlebensw'keit } = (1 - \frac{2}{20})^{20} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \approx 0,12$$

Geht es besser?

Yep: Das Ende vom 2., 3. etc Lied ist vorhersehbar.

Strategie: Vor jedem Eintreten in ein Geschäft: bestimme

$$a = \text{ Anzahl der Lieder}$$

und verlasse das Geschäft am Ende vom a-ten Lied

Zeitdiskretes Modell

$v(n) =$ maximale Überlebensw'keit, falls man noch n Minuten shoppen muss und noch am Leben ist.

Dynamic programming equation:

$$V(n) = \max_{a \in \{1,\ldots,\lfloor n/3 \rfloor + 1\}} \left\{ \left(1 - \frac{a}{20}\right) * \frac{1}{3} * \sum_{k=0}^{2} V(n - 3a + k) \right\}$$

Lösung: $V(60) \approx 0.29$; Optimale Strateguie: Höre 4 Lieder....

Spielvarianten

- ApoCareypse
- WhamHunter

Frohe Weihnachten!